ISPP, Termín 1, 17.5.2016	Jméno	ID

1. Je dán signál $f(t) = 2 + \sin 2\pi t + \cos 6\pi t, \quad t \in (-\infty, +\infty).$

a) Pokud je signál periodický určete základní periodu signálu. (**3b**)
b) Určete jeho komplexní spektrum. (**5b**)
c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum. Ocejchujte osy. (**5b**)
d) Jaká je střední hodnota tohoto signálu. (**1b**)
e) Které harmonické složky tento signál obsahuje. (**1b**) **Celkem 15b**

Řešení:

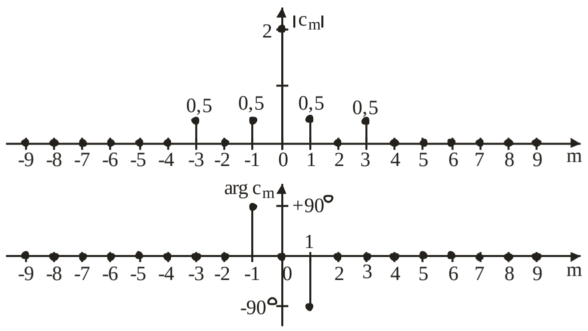
a) Signál je periodický, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{P} = 2\pi \Rightarrow P = 1[s]$

b) $f(t) = 2 + \dfrac{e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}}{2j} + \dfrac{e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}}{2} = 0,5e^{-j6\pi t} + j0,5e^{-j2\pi t} + 2 - j0,5e^{j2\pi t} + 0,5e^{j6\pi t}$

$c_0 = 2 \quad c_{-1} = +j0,5 \quad c_{+1} = -j0,5 \quad c_{-3} = c_{+3} = 0,5$ ostatní koeficienty jsou nulové.

c) $|c_0| = 2 \quad |c_{-1}| = |c_{+1}| = |c_{-3}| = |c_{+3}| = 0,5$

$\arg\{c_0\} = 0 \quad \arg\{c_{-1}\} = +90^\circ \quad \arg\{c_{+1}\} = -90^\circ \quad \arg\{c_{-3}\} = \arg\{c_{+3}\} = 0$



d) Střední hodnota je 2.
e) Signál obsahuje první a třetí harmonickou složku.

2. Diferenciální rovnice spojitého systému je $y'' + y' = u$.

a) Určete operátorový přenos systému. (**2b**)

b) Určete frekvenční přenos systému. (**2b**)

c) Načrtněte asymptotickou amplitudovou (**4b**) a fázovou (**4b**) frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Ocejchujte osy.

d) Vypočtěte (**4b**) a načrtněte (**4b**) impulsní charakteristiku systému. **Celkem 20b**

Řešení:

a) $y''(t) + y'(t) = u(t) \quad / \mathscr{L} \quad \Rightarrow p^2 Y(p) + pY(p) = U(p) \quad \Rightarrow F(p) = \dfrac{Y(p)}{U(p)} = \dfrac{1}{p(p+1)}$

b) $F(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \dfrac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\omega\right)}$

c) Pro absolutní hodnotu platí:

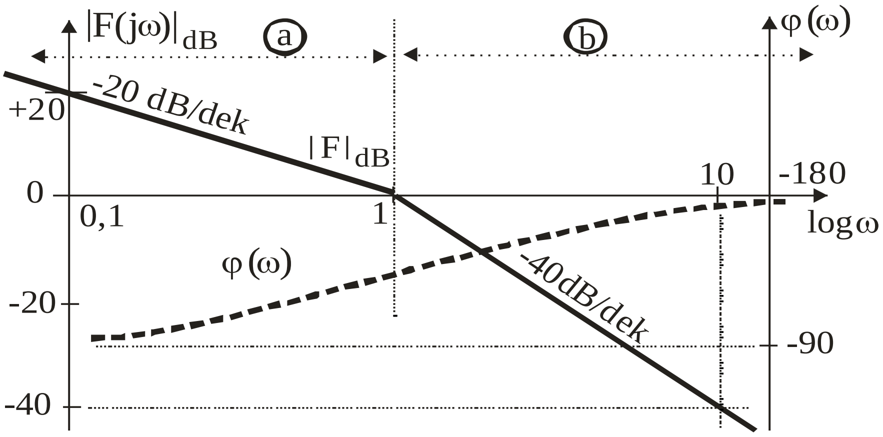
$$\left|F(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left|F(j\omega)\right| = 20\log 1 - 20\log\omega - 20\log\sqrt{\omega^2+1} = -20\log\omega - 20\log\sqrt{\omega^2+1}$$

Na charakteristice je jeden zlomový bod $\omega = 1$ a v jednotlivých oblastech platí:

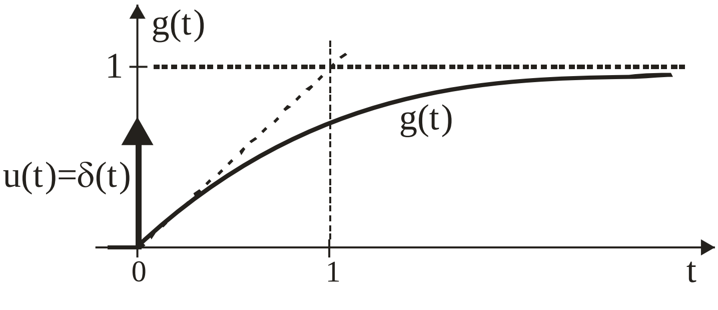
Oblast a: $\omega \ll 1 \Rightarrow \left|F(j\omega)\right|_{dB} \approx -20\log\omega$

Oblast b: $\omega \gg 1 \Rightarrow \left|F(j\omega)\right|_{dB} \approx -20\log\omega - 20\log\omega = -40\log\omega$.

Pro fázi platí $\varphi(\omega) = -\pi/2 - \arctan\omega$.



d) $g(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{F(p)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p(p+1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}\right\} = 1 - e^{-t} \quad pro\ t > 0$



3. Je dán diskrétní signál $f\left(k\right)=Ae^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $k\in\left(-\infty,+\infty\right)$ kde k je pořadové číslo vzorku.

a) Ukažte, že tato posloupnost je periodická s periodou N (**5b**)

b) Určete výkon tohoto signálu (**5b**).

c) Načrtněte jednu periodu reálné a imaginární části tohoto signálu pro $N=4$ (**5b**).

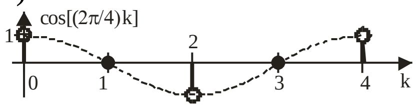
Celkem (**15b**)

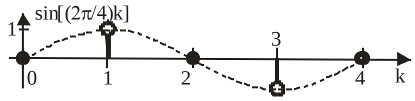
Řešení

a) $f\left(k+N\right)=Ae^{j\frac{2\pi}{N}(k+N)}=Ae^{j\frac{2\pi}{N}k}e^{j\frac{2\pi}{N}N}=Ae^{j\frac{2\pi}{N}k}e^{j2\pi}=Ae^{j\frac{2\pi}{N}k}=f\left(k\right)$

b) $P_W=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|f\left(k\right)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|Ae^{j\frac{2\pi}{N}k}\right|^2=\frac{A^2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right|^2=\frac{A^2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}1=\frac{A^2}{N}N=A^2$

c)





4. Diskrétní systém je popsán svojí přechodovou charakteristikou $h(k) = k,\ k = 0,1,2,\ldots$.

a) Načrtněte přechodovou charakteristiku pro $k = 0,1,2,3,4$. Ocejchujte osy. (**4b**)

b) Určete impulsovou charakteristiku systému pro $k \in \langle 0, \infty)$ a načrtněte ji pro $k = 0,1,2,3,4$. Ocejchujte osy. (**5b**)

c) Určete operátorový přenos systému. (**5b**)

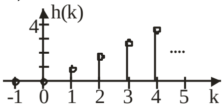
d) Napište diferenční rovnici systému. (**4b**)

e) Načrtněte rozložení pólů a nul a rozhodněte o stabilitě systému. (**2b**)

Celkem 20b

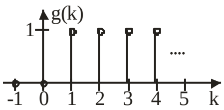
Řešení:

a) Přechodová charakteristika:



b) Pro impulsovou charakteristiku platí:

$$g(0) = h(0) = 0, \quad g(k) = h(k) - h(k-1) = k - (k-1) = 1 \ \ k = 1,2,\ldots \quad \Rightarrow \quad g(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 1 & k > 0 \end{cases}$$



c) $$F(z) = \mathscr{Z}\{g(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} - 1 = \frac{1}{1 - z^{-1}} - 1 = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z - 1}$$

d) $$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad Y(z)\left(1 - z^{-1}\right) = U(z) z^{-1} \quad \Rightarrow \quad y(k) - y(k-1) = u(k-1)$$

e) Systém má jeden pól $z_1 = 1$ který leží na jednotkové kružnici a proto je systém na mezi stability.