2015 B/K SAS, 3.termín 3.2.2016	Jméno:	ID=

1. Je dán signál

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n(t) \qquad g_n(t)=\left[\sigma\left(t+P/2+nP\right)-\sigma\left(t-P/2+nP\right)\right]\frac{a}{P}\left(t+\frac{P}{2}+nP\right) \qquad a>0, P>0$$

(15b)

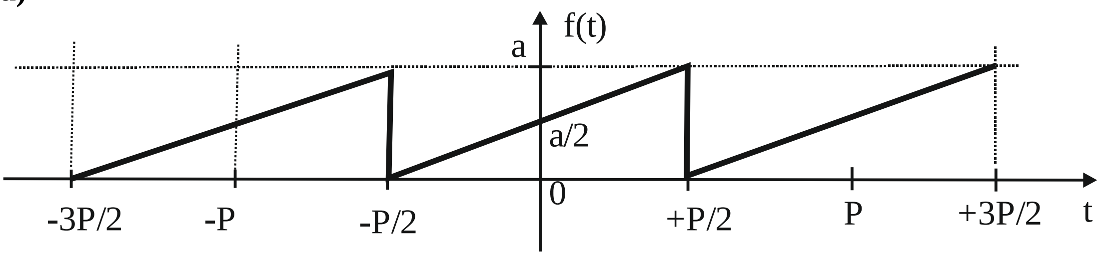
a) Načrtněte jeho průběh pro $t\in\left(-3P/2,+3P/2\right)$. Popište osy! (**5b)**

b) Určete stejnosměrnou složku signálu. (**5b)**

c) Určete výkon signálu. (**5b)**

Řešení:

a)

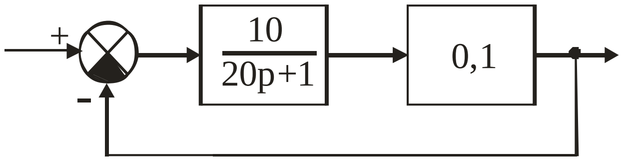


b) $$c_0=\frac{1}{P}\int_{-P/2}^{+P/2}\frac{a}{P}\left(t+\frac{P}{2}\right)dt=\begin{vmatrix} t+\frac{P}{2}=x \\ dt=dx \end{vmatrix}=\frac{a}{P^2}\int_0^P x\,dx=\frac{a}{P^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^P=\frac{a}{2}$$

c) $$P_W=\frac{1}{P}\int_{-P/2}^{+P/2}\left[\frac{a}{P}\left(t+\frac{P}{2}\right)\right]^2 dt=\begin{vmatrix} t+\frac{P}{2}=x \\ dt=dx \end{vmatrix}=\frac{a^2}{P^3}\int_0^P x^2\,dx=\frac{a^2}{P^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^P=\frac{a^2}{3}$$

2015 B/K SAS, 3.termín 3.2.2016	Jméno:	ID=

2. Blokové schéma spojitého systému je na následujícím obrázku. (**20b**)



a. Určete celkový přenos systému. (**5b**)
b. Rozhodněte o stabilitě systému. Zdůvodněte. (**2b**)
c. Načrtněte frekvenční charakteristiku v komplexní rovině. Ocejchujte osy! (**5b**)
d. Vypočtěte (**5b**) a načrtněte (**3b**) přechodovou charakteristiku. Ocejchujte osy!

Řešení:
a. Celkový přenos systému

$$F\left(p\right)=\frac{\frac{10}{20p+1}0{,}1}{1+\frac{10}{20p+1}0{,}1}=\frac{1}{20p+1+1}=\frac{1}{20p+2}=\frac{0{,}5}{10p+1}$$

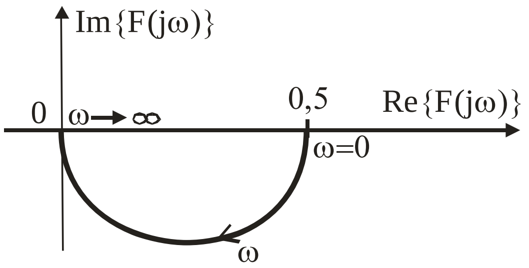
b. Systém má jeden reálný pól $p_1=-0{,}1$ který leží v levé polorovině komplexní roviny a proto je systém stabilní. **(2b)**

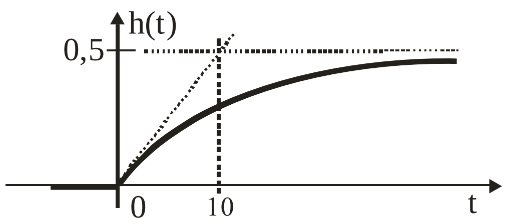
c. Frekvenční charakteristika v komplexní rovině. Pro frekvenční přenos platí

$$F\left(j\omega\right)=\frac{0{,}5}{\sqrt{100\omega^2+1}}e^{-j\arctan 10\omega}\qquad \left|F\left(j\omega\right)\right|=\frac{0{,}5}{\sqrt{100\omega^2+1}}\qquad \varphi\left(\omega\right)=-\arctan 10\omega$$

Pro velmi nízké frekvence $\omega\to 0$ platí $\left|F\left(j\omega\right)\right|=0{,}5\quad \varphi\left(\omega\right)=0$.

Pro velmi vysoké frekvence $\omega\to\infty$ platí $\left|F\left(j\omega\right)\right|=0\quad \varphi\left(\omega\right)=-\pi/2$.





d. Přechodová charakteristika

$$h\left(t\right)=L^{-1}\left\{\frac{1}{p}F\left(p\right)\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\frac{0{,}5}{10p+1}\right\}=0{,}5L^{-1}\left\{\frac{1}{p\left(10p+1\right)}\right\}$$ a výraz v závorce rozložíme na parciální zlomky. Platí

$$\frac{1}{p\left(10p+1\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{10p+1}=\frac{10Ap+A+Bp}{p\left(10p+1\right)}=\frac{p\left(10A+B\right)+A}{p\left(5p+1\right)}\Rightarrow A=1,B=-10$$. Potom

$$h\left(t\right)=0{,}5L^{-1}\left\{\frac{1}{p}-\frac{10}{10p+1}\right\}=0{,}5L^{-1}\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1/10}\right\}=0{,}5\left(1-e^{-\frac{t}{10}}\right)\quad pro\ t\geq 0$$

2015 B/K SAS, 3.termín 3.2.2016	Jméno:	ID=

3. Diskrétní signál nabývá hodnot $f\left(-k\right)=k\ pro\ k=0,1,2,3\ a\ f\left(k\right)=0\ pro\ k\neq 0,1,2,3$. **(15b)**

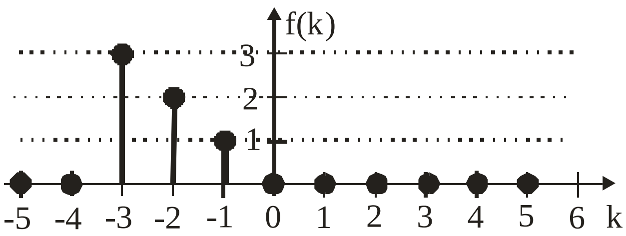
a) Nakreslete tento signál. Popište osy! **(4b)**

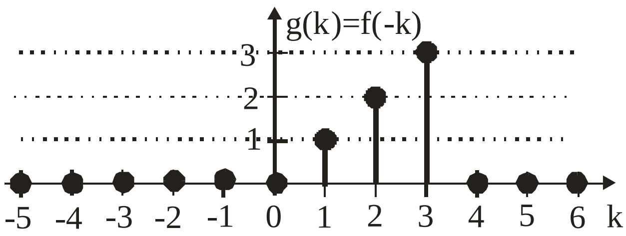
b) Vytvořte nový signál $g(k)=f\left(-k\right)$ a nakreslete ho. Popište osy! **(2b)**

c) Vypočtěte spektrum signálu $g\left(k\right)$. **(5b)**

d) Nakreslete jeho amplitudové **(2b)** a fázové **(2b)** spektrum. Popište osy!.

Řešení:





$$G(0)=\left[g\left(0\right)e^{-j0\frac{2\pi}{4}0}+g\left(1\right)e^{-j0\frac{2\pi}{4}1}+g\left(2\right)e^{-j0\frac{2\pi}{4}2}+g\left(3\right)e^{-j0\frac{2\pi}{4}3}\right]=\left[0e^{-j0\frac{2\pi}{4}0}+1e^{-j0\frac{2\pi}{4}1}+2e^{-j0\frac{2\pi}{4}2}+3e^{-j0\frac{2\pi}{4}3}\right]$$

$$G(0)=\left[1+2+3\right]=6$$

$$G(1)=\left[g\left(0\right)e^{-j1\frac{2\pi}{4}0}+g\left(1\right)e^{-j1\frac{2\pi}{4}1}+g\left(2\right)e^{-j1\frac{2\pi}{4}2}+g\left(3\right)e^{-j1\frac{2\pi}{4}3}\right]=\left[0e^{-j1\frac{2\pi}{4}0}+1e^{-j1\frac{2\pi}{4}1}+2e^{-j1\frac{2\pi}{4}2}+3e^{-j1\frac{2\pi}{4}3}\right]$$

$$G(1)=\left[0e^{-j1\frac{2\pi}{4}0}+1e^{-j1\frac{2\pi}{4}1}+2e^{-j1\frac{2\pi}{4}2}+3e^{-j1\frac{2\pi}{4}3}\right]=\left[1e^{-j\frac{\pi}{2}}+2e^{-j\pi}+3e^{-j\frac{6\pi}{4}}\right]=\left[-j-2+3j\right]=-2+2j$$

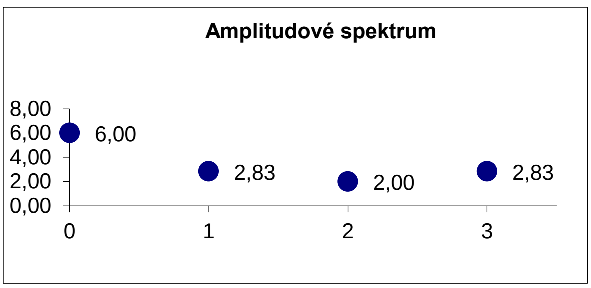
$$G(2)=\left[g\left(0\right)e^{-j2\frac{2\pi}{4}0}+g\left(1\right)e^{-j2\frac{2\pi}{4}1}+g\left(2\right)e^{-j2\frac{2\pi}{4}2}+g\left(3\right)e^{-j2\frac{2\pi}{4}3}\right]=\left[0e^{-j2\frac{2\pi}{4}0}+1e^{-j2\frac{2\pi}{4}1}+2e^{-j2\frac{2\pi}{4}2}+3e^{-j2\frac{2\pi}{4}3}\right]$$

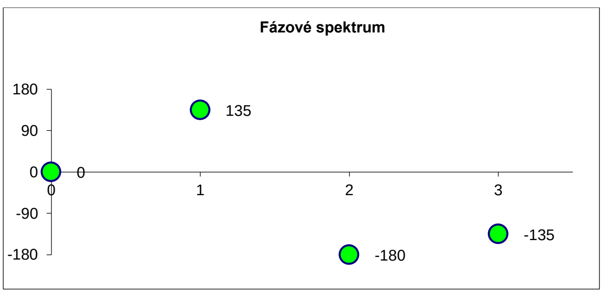
$$G(2)=\left[0e^{-j2\frac{2\pi}{4}0}+3e^{-j2\frac{2\pi}{4}1}+2e^{-j2\frac{2\pi}{4}2}+1e^{-j2\frac{2\pi}{4}3}\right]=\left[1e^{-j\pi}+2e^{-j2\pi}+3e^{-j3\pi}\right]=\left[-1+2-3\right]=-2$$

$$G(3)=\left[g\left(0\right)e^{-j3\frac{2\pi}{4}0}+g\left(1\right)e^{-j3\frac{2\pi}{4}1}+g\left(2\right)e^{-j3\frac{2\pi}{4}2}+g\left(3\right)e^{-j3\frac{2\pi}{4}3}\right]=\left[0e^{-j3\frac{2\pi}{4}0}+1e^{-j3\frac{2\pi}{4}1}+2e^{-j3\frac{2\pi}{4}2}+3e^{-j3\frac{2\pi}{4}3}\right]$$

$$G(3)=\left[0e^{-j3\frac{2\pi}{4}0}+1e^{-j3\frac{2\pi}{4}1}+2e^{-j3\frac{2\pi}{4}2}+3e^{-j3\frac{2\pi}{4}3}\right]=\left[1e^{-j\frac{6\pi}{4}}+2e^{-j3\pi}+3e^{-j\frac{9\pi}{2}}\right]=\left[j-2-3j\right]=-2-2j$$

$G(0)=6$	$\lvert G(0)\rvert=6$	$\arg\left(G(0)\right)=0^\circ$
$G(1)=-2+2j$	$\lvert G(1)\rvert=\sqrt{8}=2{,}83$	$\arg\left(G(1)\right)=+135^\circ$
$G(2)=-2$	$\lvert G(2)\rvert=2$	$\arg\left(G(2)\right)=-180^\circ$
$G(3)=-2-2j$	$\lvert G(3)\rvert=\sqrt{8}=2{,}83$	$\arg\left(G(3)\right)=-135^\circ$





2015 B/K SAS, 3.termín 3.2.2016	Jméno:	ID=

4. Lineární diskrétní systém se vstupem $u(k)$ a výstupem $y(k)$ je popsán diferenční rovnicí

$y(k)+0{,}9y(k-1)=3u(k)$. **(20b)**

a. Určete *Z* přenos systému. (**4b**)
b. Určete stabilitu systému a zdůvodněte. (**4b**)
c. Určete impulsovou charakteristiku a načrtněte ji pro prvních 5 hodnot. (**4b**)
d. K jakému spojitému systému **prvního řádu** lze vlastnosti tohoto systému přirovnat. (**8b**)

Řešení:

a. $Y(z)+0{,}9z^{-1}Y(z)=3U(z)$

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{3}{1+0{,}9z^{-1}}=\frac{3z}{z+0{,}9}$$

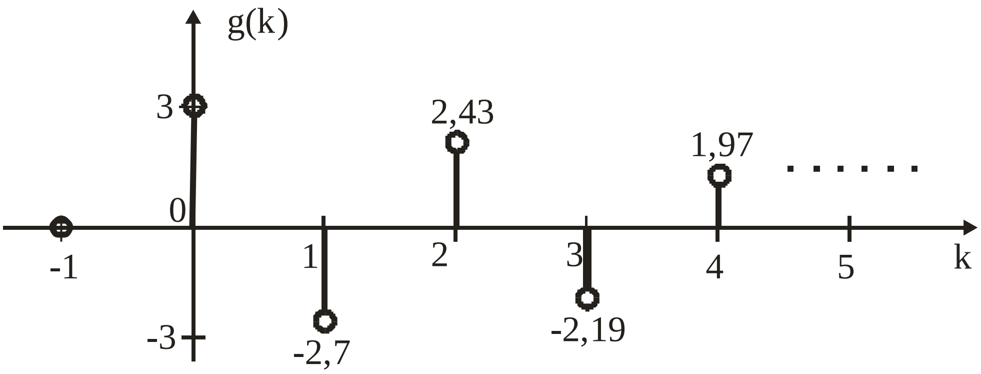
b. Systém má jeden pól $z_1=-0{,}9$ který leží uvnitř jednotkové kružnice a proto je stabilní.

c. Pro Z obraz impulsové charakteristiky platí

$$G(z)=F(z)=\frac{3}{1+0{,}9z^{-1}}=\frac{3}{1-(-0{,}9)z^{-1}}=3\sum_{k=0}^{\infty}(-0{,}9)^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}3(-0{,}9)^k z^{-k}$$

a pro impulsovou charakteristiku tedy platí

$$g(k)=\begin{cases}3(-0{,}9)^k & k\ge 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$



d. Systém je prvního řádu a přitom má kmitavou odezvu. Takový systém nemá obdobu u spojitých systémů.