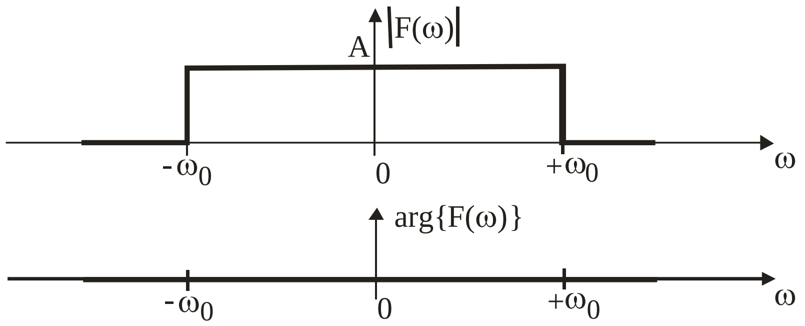
2015 B/K SAS, 2.termín 29.1.2016	Jméno:	ID=

1. Je dáno spektrum spojitého signálu $F(\omega) = A[\sigma(\omega + \omega_0) - \sigma(\omega - \omega_0)]$,
$A, \omega_0 > 0, \omega \in (-\infty, +\infty)$ **(15b)**
a) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum. Popište osy.
b) Určete, zda je signál periodický, zdůvodněte.
c) Vypočtěte časový průběh signálu.
d) Načrtněte časový průběh signálu.
e) Načrtněte časový průběh signálu pro $\omega_0 \to \infty$. Pomůcka: $\lim\limits_{a\to\infty} \frac{\sin ax}{x} = \pi\delta(x)$

Řešení:
a)



(1b)

b)
Jelikož spektrum signálu není diskrétní, je tento signál neperiodický. **(2b)**

c)

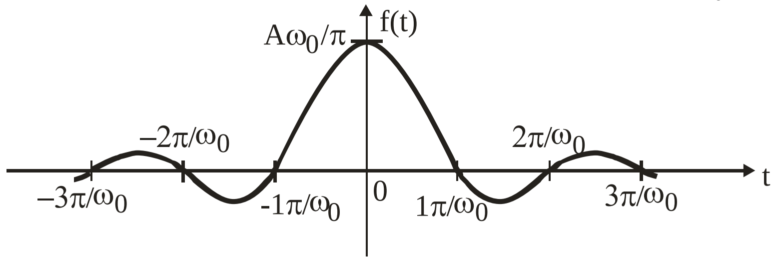
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{+j\omega t}d\omega = \frac{A}{\pi t}\frac{e^{+j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = \frac{A}{\pi t}\sin\omega_0 t =$$
$$= \frac{A\omega_0}{\pi}\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}$$

(3b)

d)

$$f(t)|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{A\omega_0}{\pi}\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t} = \frac{A\omega_0}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t} = \frac{A\omega_0}{\pi}$$

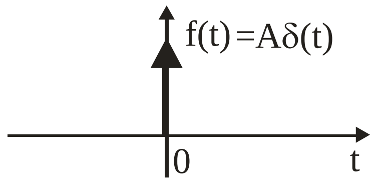
nulové body: $\omega_0 t = k\pi;\ \ k = 1,2,3,\ldots \quad \Rightarrow \quad t = \frac{k\pi}{\omega_0}$



(4b)

e)
Pro $\omega_0 \to \infty$ platí

$$\lim_{\omega_0\to\infty} f(t) = \lim_{\omega_0\to\infty}\frac{A\omega_0}{\pi}\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t} = \frac{A}{\pi}\lim_{\omega_0\to\infty}\frac{\sin\omega_0 t}{t} = \frac{A}{\pi}\pi\delta(t) = A\delta(t)$$



(5b)

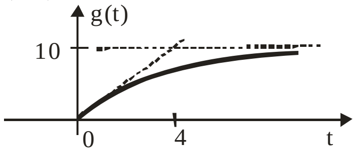
2015 B/K SAS, 2.termín 29.1.2016	Jméno:	ID=

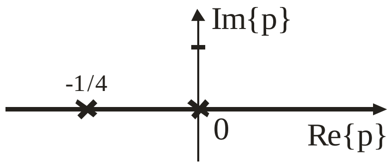
2. Spojitý systém má impulsní charakteristiku $g(t) = 10\left(1 - e^{-t/4}\right) \quad t \geq 0.$ **(20b)**

a) Načrtněte impulsní charakteristiku. Popište osy. **(2b)**
b) Vypočtěte jeho operátorový přenos systému. **(2b)**
c) Nakreslete jeho rozložení pólů a nul. **(2b)**
d) Určete jeho diferenciální rovnici. **(2b)**
e) Načrtněte jeho frekvenční charakteristiku v komplexní rovině. Popište osy. **(6b)**
f) Načrtněte jeho asymptotickou amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Popište osy. **(6b)**

Řešení:

a) (2b)





b) Pro operátorový přenos platí **(2b)**

$$F(p) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{10\left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\right)\right\} = 10\ \mathcal{L}\{\sigma(t)\} - 10\ \mathcal{L}\left\{e^{-t/4}\right\} = \frac{10}{p} - \frac{10}{(p+1/4)} =$$

$$= \frac{10}{p} - \frac{40}{(4p+1)} = \frac{40p + 10 - 40p}{p(4p+1)} = \frac{10}{p(4p+1)}$$

c) Systém má dva póly, jeden v nule, druhý v -1/4 (viz obr vpravo) **(2b)**

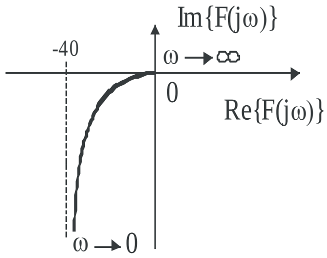
d) Pro diferenciální rovnici platí **(2b)**

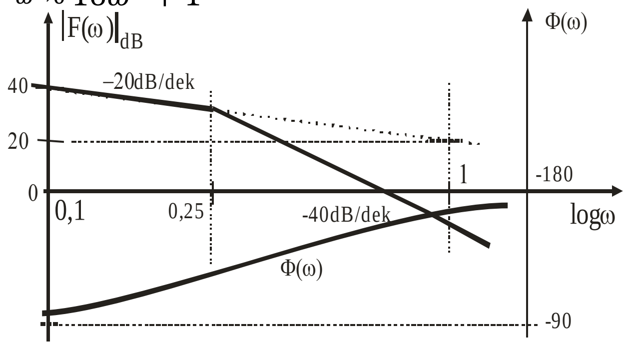
$$F(p) = \frac{10}{p(4p+1)} = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad \Rightarrow \quad 4p^2Y(p) + pY(p) = 10U(p) \quad \Rightarrow \quad 4y'' + y' = 10u$$

e) Pro frekvenční přenos platí **(6b)**

$$F(j\omega) = \frac{10}{-4\omega^2 + j\omega} = \frac{10(-4\omega^2 - j\omega)}{16\omega^4 + \omega^2} = \frac{-40\omega^2}{16\omega^4 + \omega^2} - j\frac{10\omega}{16\omega^4 + \omega^2}$$

$$\lim_{\omega \to 0} \mathrm{Re}\{F(j\omega)\} = \lim_{\omega \to 0} \frac{-40\omega^2}{16\omega^4 + \omega^2} = \lim_{\omega \to 0} \frac{-40}{16\omega^2 + 1} = -40$$





f) Pro amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku platí: **(6b)**

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20\log\left|\frac{10}{j\omega(4j\omega + 1)}\right| = 20\log 10 - 20\log\omega - 20\log\sqrt{16\omega^2 + 1}$$

$$\Phi(\omega) = \arg\{F(j\omega)\} = -\pi/2 - \arctan 4\omega$$

2015 B/K SAS, 2.termín 29.1.2016	Jméno:	ID=

3. Je dán diskrétní periodický signál s periodou $N = 4$ pro jehož hodnoty platí $f(0) = 2,\ f(2) = 1$ a $f(1) = f(3) = 0$. **(15b)**

a) Vypočtěte jeho spektrum. **(5b)**

b) Načrtněte amplitudové spektrum pro $m \in (-2, +8)$. Ocejchujte osy. **(5b)**

c) Načrtněte fázové spektrum pro $m \in (-2, +8)$. Ocejchujte osy. **(5b)**

Řešení:

a) (5b)

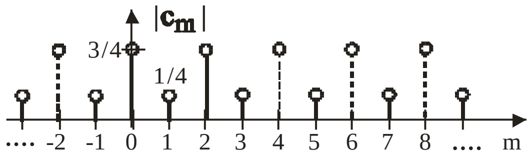
$$c_0 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j0\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}(2\times 1 + 0\times 1 + 1\times 1 + 0\times 1) = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$c_1 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j1\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(2\times 1 + 0\times e^{-j\frac{\pi}{2}1} + 1\times e^{-j\frac{\pi}{2}2} + 0\times e^{-j\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

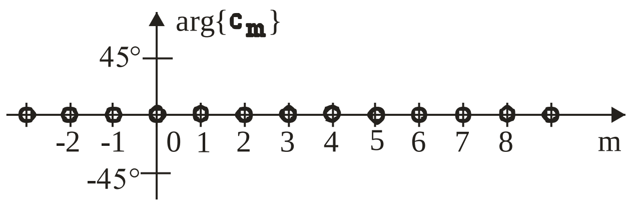
$$c_2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j2\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(2\times 1 + 0\times e^{-j2\frac{\pi}{2}1} + 1\times e^{-j2\frac{\pi}{2}2} + 0.e^{-j2\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j3\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(2\times 1 + 0\times e^{-j3\frac{\pi}{2}1} + 1\times e^{-j3\frac{\pi}{2}2} + 0\times e^{-j3\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{1}{4}$$

b) $|c_0| = 3/4 \quad |c_1| = 1/4 \quad |c_2| = 3/4 \quad |c_3| = 1/4$ **(5b)**



c) $\arg\{c_0\} = 0 \quad \arg\{c_1\} = 0 \quad \arg\{c_2\} = 0 \quad \arg\{c_3\} = 0$ **(5b)**



4. Diskrétní systém má operátorový přenos $F(z) = \frac{K}{z-a}$, $|a| < 1$. **Na vstupu systému působí harmonický signál (posloupnost)** $u(k) = \sigma(k)e^{+j\omega kT}$ **kde** ω **je jeho kmitočet a** T **je perioda vzorkování.** (**20b**)

a) Vypočtěte časový průběh výstupního signálu. **(6b)**

b) Vypočtený časový průběh sestává ze dvou částí. Vysvětlete jejich význam. **(7b)**

c) Určete amplitudu výstupního harmonického signálu po odeznění přechodových dějů. **(8b)**

Řešení:

a) (6b)

Pro obraz vstupního signálu platí $U(z) = \mathcal{Z}\{u(k)\} = \mathcal{Z}\left\{e^{j\omega kT}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\left(e^{j\omega T}\right)^k\right\} = \frac{z}{z-e^{j\omega T}}$

Pro obraz výstupního signálu platí $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\} = F(z)U(z) = \frac{K}{z-a}\frac{z}{z-e^{j\omega T}}$.

Rozkladem na parciální zlomky nalezneme:

$\frac{K}{z-a}\frac{z}{z-e^{j\omega T}} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-e^{j\omega T}} = \frac{Az-Ae^{j\omega T}+Bz-Ba}{(z-a)\left(z-e^{j\omega T}\right)} \Rightarrow A + B = K, Ae^{j\omega T} + Ba = 0 \Rightarrow$

$A = K - B, (K - B)e^{j\omega T} + Ba = 0 \Rightarrow Ke^{j\omega T} = B\left(e^{j\omega T} - a\right) \Rightarrow$

$$B = \frac{Ke^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - a}, A = K - \frac{Ke^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - a} = K\left(1 - \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - a}\right) = K\frac{-a}{e^{j\omega T} - a}$$

Tedy

$$Y(z) = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z - e^{j\omega T}} = \frac{Ke^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - a}\frac{1}{z - e^{j\omega T}} - K\frac{a}{e^{j\omega T} - a}\frac{1}{z-a}$$

$y(k) = \frac{Ke^{j\omega T}}{e^{j\omega T}-a}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-e^{j\omega T}}\right\} - K\frac{a}{e^{j\omega T}-a}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-a}\right\} =$

$$= \frac{K}{e^{j\omega T} - a}e^{j\omega kT} - \frac{K}{e^{j\omega T} - a}a^k \quad pro \quad k \geq 1 \quad a \quad y(k) = 0 \quad pro \quad k < 1$$

b) (7b)

První část výstupního signálu $\frac{K}{\left(e^{j\omega T}-a\right)}e^{+j\omega kT}$ představuje harmonicky se měnící posloupnost o stejném kmitočtu jako vstupní signál, ale s jinou amplitudou a fází. Amplituda i fáze jsou dány komplexním číslem $\frac{K}{\left(e^{j\omega T}-a\right)}$.

Druhá část výstupního signálu $\frac{K}{e^{j\omega T}-a}a^k$ představuje přechodový děj, který časem zanikne neboť $|a| < 1$.

c) (8b)

Po odeznění přechodových dějů bude amplituda výstupního harmonického signálu dána jako $\left|\frac{K}{\left(e^{j\omega T}-a\right)}\right|$. Tuto hodnotu lze získat přímo dosazením za $z = e^{j\omega T}$ do operátorového přenosu $F(z)$ a vypočítat absolutní hodnotu.