2015 B/K SAS, 1.termín B 15.1.2016	Jméno:	ID=

1. Je dán spojitý signál $f(t) = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2} + 2\cos^2\frac{t}{2}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$ **(15b)**

a) Rozhodněte, zda je signál periodický. V případě že ano, určete jeho základní periodu a základním kmitočet.

b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu.

c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum signálu. Popište a ocejchujte osy.

d) V případě, že tento signál je periodický určete jeho výkon, v případě, že není periodický určete jeho energii.

Řešení:

a)

Platí $f(t) = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2} + 2\cos^2\frac{t}{2} = 1 + 2\cos t$. Signál je periodický se základní periodou $P = 2\pi$ a základním kmitočtem $\omega_0 = 2\pi/P = 2\pi/2\pi = 1$. **(4b)**

b)

Platí $f(t) = 1 + 2\cos t = 1 + 2\frac{(e^{jt}+e^{-jt})}{2} = 1 + e^{jt} + e^{-jt} = 1 + e^{-jt} + e^{+jt}$ takže ve spektru tohoto signálu jsou jen koeficienty $c_0 = 1,\ c_{-1} = 1,\ c_{+1} = 1$ a ostatní koeficienty jsou nulové. **(4b)**

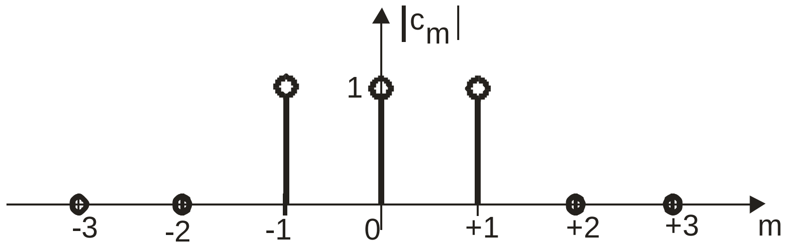
c)

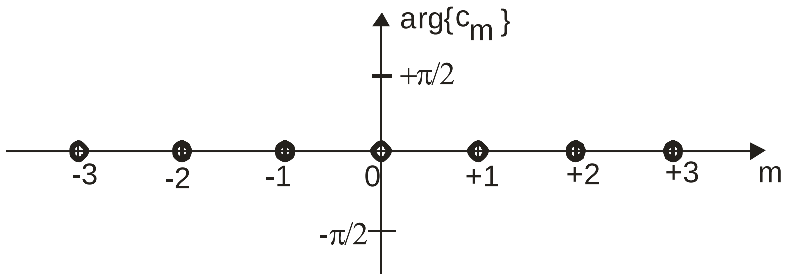
Pro amplitudové a fázové spektrum platí

$|c_0| = |1| = 1 \qquad \arg\{c_0\} = \arg\{1\} = 0$

$|c_{-1}| = |1| = 1 \qquad \arg\{c_{-1}\} = \arg\{1\} = 0$ **(4b)**

$|c_{+1}| = |1| = 1 \qquad \arg\{c_{+1}\} = \arg\{1\} = 0$





d)

Signál je periodický a pro jeho výkon platí na základě Parcevalovy rovnosti

$P_W = \frac{1}{P}\int_0^P |f(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |c_m|^2 = c_0^2 + c_{-1}^2 + c_{+1}^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ **(3b)**

2015 B/K SAS, 1.termín B 15.1.2016	Jméno:	ID=

2. Systém je popsán diferenciální rovnicí $3y'' + 4y' + y = 10u'$. **(20b)**

a) Napište vztah pro operátorový přenos $F(p)$.

b) Načrtněte rozložení PaN.

c) Určete stabilitu systému.

d) Napište frekvenční přenos ve tvaru $F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\Phi(\omega)}$.

e) Nakreslete amplitudovou a fázovou charakteristiku v LS. Ocejchujte všechny osy.

f) Vypočtěte impulsní charakteristiku systému s přenosem $0{,}1F(p)/p$ a načrtněte ji.

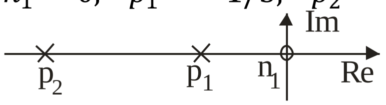
Řešení:

a)

$$F(p) = \frac{10p}{3p^2+4p+1} = \frac{10p}{(3p+1)(p+1)}$$ **(3b)**

b)

$n_1 = 0, \quad p_1 = -1/3, \quad p_2 = -1$



(3b)

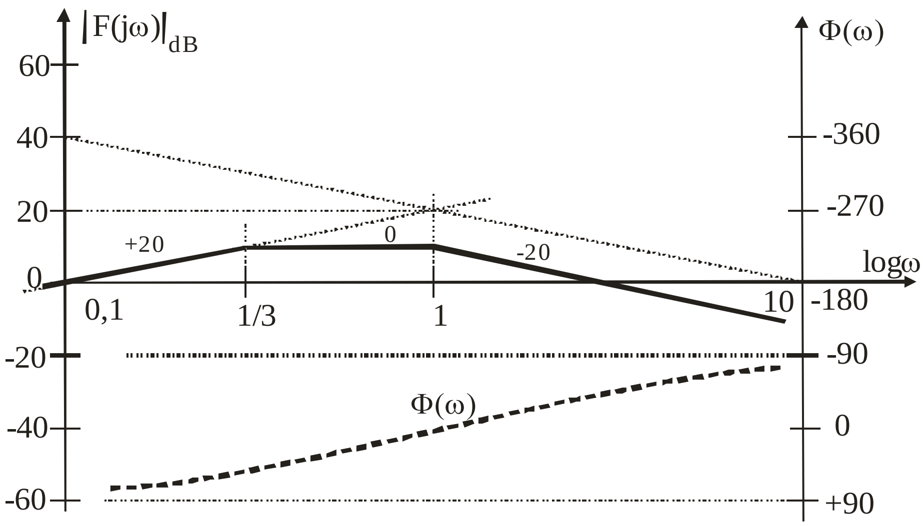
c)

Oba póly ježí v levé polorovině=> systém je stabilní **(3b)**

d)

$$F(j\omega) = \frac{10\omega}{\sqrt{9\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+1}} e^{j(\pi/2 - \mathrm{arctan}3\omega - \mathrm{arctan}\omega)}$$ **(3b)**

e)



(4b)

f)

$$F_1(p) = \frac{0{,}1}{p}F(p) = \frac{1}{(3p+1)(p+1)} \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(3p+1)(p+1)}\right\}$$

$$\frac{1}{(3p+1)(p+1)} = \frac{Ap + A + 3Bp + B}{(3p+1)(p+1)} \Rightarrow \begin{array}{l} A + B = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{3}{2} \\ 1 - B + 3B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

$$= g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{2}}{(3p+1)} - \frac{\frac{1}{2}}{(p+1)}\right\} = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{3}} - \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$g(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{3}} - \frac{1}{2}e^{-t}$$

Průběh $g(t)$:

$$g(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{3}}-\frac{1}{2}e^{-t}\quad g(0)=0\quad g(\infty)=0$$

$$\frac{dg(t)}{dt}=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{3}}\frac{-1}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}(-1)=-\frac{1}{6}e^{-\frac{t}{3}}+\frac{1}{2}e^{-t}=-\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}+e^{-t}$$

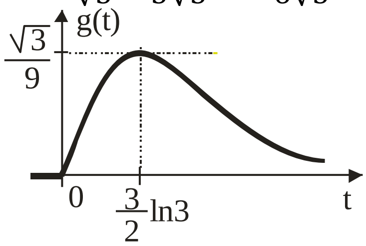
$$-\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}+e^{-t}=0\Rightarrow e^{-t}=\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}\Rightarrow -t+\frac{t}{3}=\ln 1-\ln 3\Rightarrow \frac{2}{3}t=\ln 3\Rightarrow t=\frac{3}{2}\ln 3$$

$$\left.\frac{dg(t)}{dt}\right|_{t=0}=-\frac{1}{3}e^{-\frac{0}{3}}+e^{-0}=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$

Hodnota v extrému

$$g\left(t=\frac{3}{2}\ln 3\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}\frac{3}{2}\ln 3}-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}\ln 3}=\frac{1}{2}\left(e^{\ln 3}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(e^{\ln 3}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(3^{-\frac{1}{2}}-3^{-\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{3-1}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$



(4b)

2015 B/K SAS, 1.termín B 15.1.2016	Jméno:	ID=

3. Je dán diskrétní signál $f(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(k+4i) \quad i=0,\pm1,\pm2\ldots$ **,kde** $g(k)=\sum_{n=0}^{3}(3-n)\delta(k-n)$.

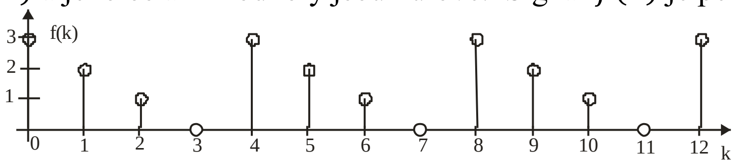
(15b)

a) Načrtněte hodnoty signálu pro $k=0,1,2,\ldots 12$. Ocejchujte osy.
b) Je tento signál periodický? Pokud ano, určete jeho periodu.
c) Vypočtěte spektrum tohoto signálu.
d) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum tohoto signálu. Ocejchujte osy.

Řešení:

a)

Pro signál $g(k)$ platí:$g(k)=(3-0)\delta(k-0)+(3-1)\delta(k-1)+(3-2)\delta(k-2)+(3-3)\delta(k-3)$ a jeho ostatní hodnoty jsou nulové. Signál $f(k)$ je periodickým opakováním $g(k)$ s periodou $N=4$



(3b)

b)

Z obrázku je patrno, že signál je periodický a má periodu $N=4$. **(2b)**

c)

Pro výpočet koeficientů diskrétní Fourierovy řady platí **5b)**

$$c_m=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{4}k}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[f(0)e^{-jm\frac{2\pi}{4}0}+f(1)e^{-jm\frac{2\pi}{4}1}f(2)e^{-jm\frac{2\pi}{4}2}+f(3)e^{-jm\frac{2\pi}{4}3}\right] \quad m=0,1,2,3.$$

$$c_m=\frac{1}{4}\left[f(0)e^{-jm\frac{2\pi}{4}0}+f(1)e^{-jm\frac{2\pi}{4}1}f(2)e^{-jm\frac{2\pi}{4}2}+f(3)e^{-jm\frac{2\pi}{4}3}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[3e^{-jm\frac{2\pi}{4}0}+2e^{-jm\frac{\pi}{2}1}1e^{-jm\frac{\pi}{2}2}\right]$$

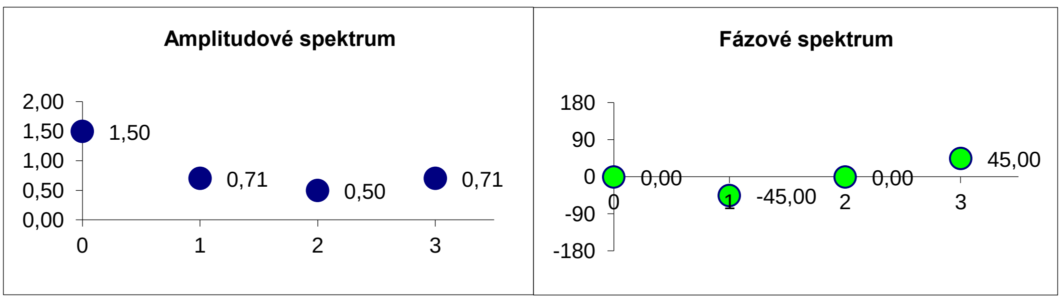
$$c_0=\frac{1}{4}\left[3e^{-j0\frac{\pi}{2}0}+2e^{-j0\frac{\pi}{2}1}+1e^{-j0\frac{\pi}{2}2}\right]=\frac{1}{4}[3+2+1]=\frac{3}{2}=1{,}5$$

$$c_1=\frac{1}{4}\left[3e^{-j1\frac{\pi}{2}0}+2e^{-j1\frac{\pi}{2}1}+1e^{-j1\frac{\pi}{2}2}\right]=\frac{1}{4}[3-2j-1]=\frac{2-2j}{4}=\frac{1-j}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$c_2=\frac{1}{4}\left[3e^{-j2\frac{\pi}{2}0}+2e^{-j2\frac{\pi}{2}1}+1e^{-j2\frac{\pi}{2}2}\right]=\frac{1}{4}[3-2+1]=\frac{2}{4}=0{,}5$$

$$c_3=\frac{1}{4}\left[3e^{-j3\frac{\pi}{2}0}+2e^{-j3\frac{\pi}{2}1}+1e^{-j3\frac{\pi}{2}2}\right]=\frac{1}{4}[3+2j-1]=\frac{2+2j}{4}=\frac{1+j}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{+j\frac{\pi}{4}}$$

d)



(5b)

2015 B/K SAS, 1.termín B 15.1.2016	Jméno:	ID=

4. Je dán spojitý systém s impulsní charakteristikou $g(t) = A\sigma(t),\ A > 0.$ (20b)

a) Vypočtěte operátorový přenos systému. Jedná se o systém statický nebo astatický?

b) Vypočtěte přechodovou charakteristiku systému.

c) Na vstupu tohoto systému je připojen tvarovač nultého řádu. Jaká musí být vzorkovací perioda T, aby pro $A = 10$ platilo pro ekvivalentní Z přenos diskretizovaného spojitého systému $F_e(z) = 1/(z-1)$?

d) Vypočtěte přechodovou charakteristiku diskretizovaného systému a načrtněte ji spolu s přechodovou charakteristikou spojitého systému ($pro\ A = 10$) do jednoho obrázku a porovnejte.

Řešení:

a)

Pro operátorový přenos platí:

$F(p) = \mathcal{L}\{g(t)\} = A\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = A/p$ **(3b)**

Jedná se o astatický (integrační) systém.

b)

Pro přechodovou charakteristiku platí

$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}F(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{p^2}\right\} = \begin{cases} At & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ **(5b)**

c)

Pro ekvivalentní Z přenos diskretizovaného systému platí

$F_e(z) = (1 - z^{-1})\mathrm{Z}\{h(k)\}$

kde $h(k)$ je navzorkovaná přechodová charakteristika $h(t)$ tj.

$h(k) = h(t)|_{t=kT} = AkT \quad k = 0,1,2,\ldots$

Její Z obraz bude $\mathrm{Z}\{h(k)\} = \mathrm{Z}\{AkT\} = AT.\mathrm{Z}\{k\} = AT\frac{z}{(z-1)^2}$

a pro ekvivalentní Z přenos diskretizovaného systému bude platit **(6b)**

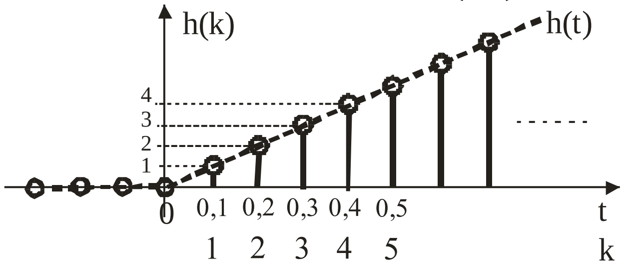
$$F_e(z) = (1 - z^{-1})\mathrm{Z}\{h(k)\} = \frac{z-1}{z}\frac{ATz}{(z-1)^2} = \frac{AT}{z-1} \quad \Rightarrow \quad AT = 1$$

$$T = \frac{1}{A} = \frac{1}{10} = 0{,}1\text{sec}$$

d)

Pro přechodovou charakteristiku diskretizovaného systému platí

$$\mathcal{Z}\{h(k)\} = \frac{z}{z-1}F_e(z) = \frac{z}{z-1}\frac{1}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad \Rightarrow \quad h(k) = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$



Obě charakteristiky nabývají v okamžicích vzorkování stejných hodnot. **(6b)**