2015 B/K SAS, 1.termín A 15.1.2016	Jméno:	ID=

1. Je dán spojitý signál $f(t) = 1 + 4\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2},\quad t \in (-\infty, +\infty)$. **(15b)**

a) Rozhodněte, zda je signál periodický. V případě že ano, určete jeho základní periodu a základní kmitočet.
b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu.
c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum signálu. Popište a ocejchujte osy.
d) V případě, že tento signál je periodický určete jeho výkon, v případě, že není periodický určete jeho energii.

Řešení:

a)

Platí $f(t) = 1 + 4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = 1 + 2\sin t$. Signál je periodický se základní periodou $P = 2\pi$ a základní kmitočtem $\omega_0 = 2\pi/P = 2\pi/2\pi = 1$. **(4b)**

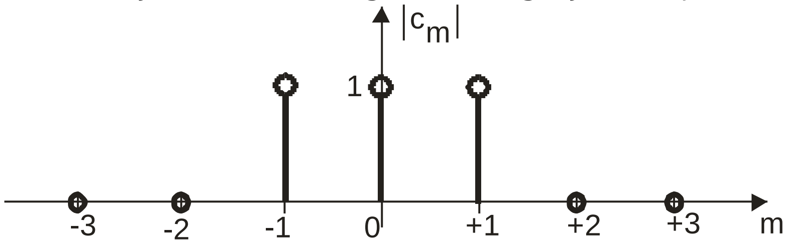
b)

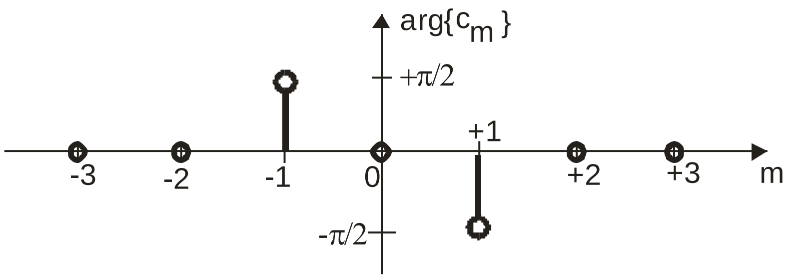
Platí $f(t) = 1 + 2\sin t = 1 + 2\frac{(e^{jt} - e^{-jt})}{2j} = 1 - j(e^{jt} - e^{-jt}) = 1 + je^{-jt} - je^{+jt}$ takže ve spektru tohoto signálu jsou jen koeficienty $c_0 = 1$, $c_{-1} = j$ a $c_{+1} = -j$ a ostatní koeficienty jsou nulové. **(4b)**

c)

Pro amplitudové a fázové spektrum platí

$|c_0| = |1| = 1$ $\qquad$ $\arg\{c_0\} = \arg\{1\} = 0$
$|c_{-1}| = |+j| = 1$ $\qquad$ $\arg\{c_{-1}\} = \arg\{+j\} = +\pi/2$ **(4b)**
$|c_{+1}| = |-j| = 1$ $\qquad$ $\arg\{c_{+1}\} = \arg\{-j\} = -\pi/2$





d)

Signál je periodický a pro jeho výkon platí na základě Parcevalovy rovnosti

$P_W = \frac{1}{P}\int_0^P |f(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |c_m|^2 = |c_0|^2 + |c_{-1}|^2 + |c_{+1}|^2 = 3$ **(3b)**

2015 B/K SAS, 1.termín A 15.1.2016	Jméno:	ID=

2. Systém je popsán diferenciální rovnicí $3y''' + 4y'' + y' = 10u$. **(20b)**

a) Napište vztah pro operátorový přenos $F(p)$.
b) Načrtněte rozložení PaN.
c) Určete stabilitu systému.
d) Napište frekvenční přenos ve tvaru $F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\Phi(\omega)}$.
e) Nakreslete asymptotickou amplitudovou a fázovou charakteristiku v LS. Ocejchujte všechny osy.
f) Vypočtěte impulsní charakteristiku systému s přenosem $pF(p)/10$ a načrtněte ji, ocejchujte osy.

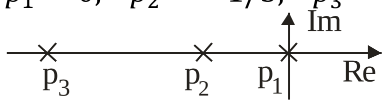
Řešení:

a)

$$F(p) = \frac{10}{3p^3+4p^2+p} = \frac{10}{p(3p^2+4p+1)} = \frac{10}{p(3p+1)(p+1)}$$ **(3b)**

b)

$p_1 = 0, \quad p_2 = -1/3, \quad p_3 = -1$ **(3b)**



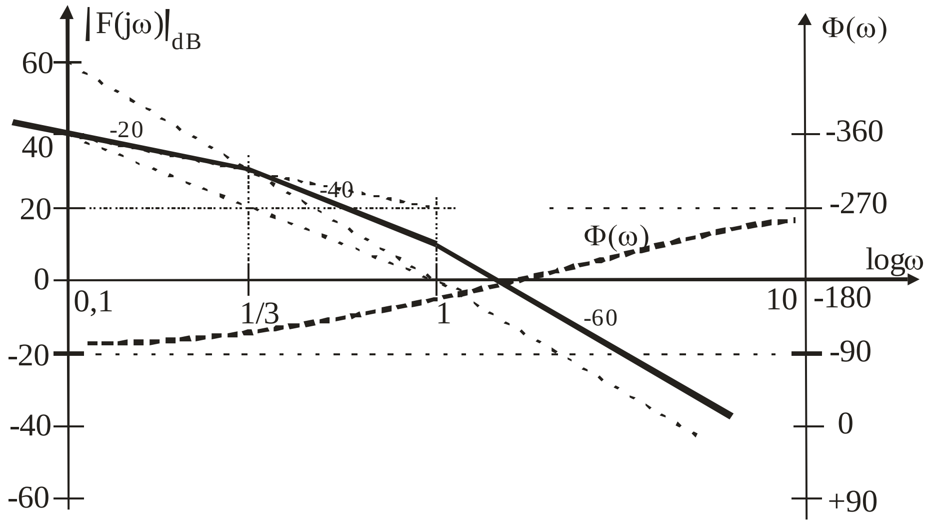
c)

Jeden pól leží v nule=> systém je na mezi stability **(3b)**

d)

$$F(j\omega) = \frac{10}{\omega\sqrt{9\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+1}} e^{-j(\pi/2+\arctan 3\omega+\arctan\omega)}$$ **(3b)**

e)



(4b)

f)

$$F_1(p) = \frac{p}{10}F(p) = \frac{1}{(3p+1)(p+1)} \qquad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(3p+1)(p+1)}\right\}$$

$$\frac{1}{(3p+1)(p+1)} = \frac{A}{(3p+1)} + \frac{B}{(p+1)} = \frac{Ap + A + 3Bp + B}{(3p+1)(p+1)} \qquad \Rightarrow \quad A = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{2}}{(3p+1)} - \frac{\frac{1}{2}}{(p+1)}\right\} = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{3}} - \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$g(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{3}} - \frac{1}{2}e^{-t}$$

Průběh $g(t)$:

$$g(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{3}}-\frac{1}{2}e^{-t}\quad g(0)=0\quad g(\infty)=0$$

$$\frac{dg(t)}{dt}=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{3}}\frac{-1}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}(-1)=-\frac{1}{6}e^{-\frac{t}{3}}+\frac{1}{2}e^{-t}=-\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}+e^{-t}$$

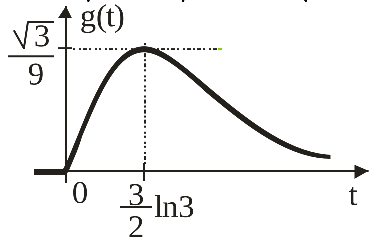
$$-\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}+e^{-t}=0\Rightarrow e^{-t}=\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}\Rightarrow -t+\frac{t}{3}=\ln 1-\ln 3\Rightarrow \frac{2}{3}t=\ln 3\Rightarrow t=\frac{3}{2}\ln 3$$

$$\left.\frac{dg(t)}{dt}\right|_{t=0}=-\frac{1}{3}e^{-\frac{0}{3}}+e^{-0}=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$

Hodnota v extrému

$$g\left(t=\frac{3}{2}\ln 3\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{13}{32}\ln 3}-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}\ln 3}=\frac{1}{2}\left(e^{\ln 3}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(e^{\ln 3}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(3^{-\frac{1}{2}}-3^{-\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{3-1}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$



(4b)

3. Je dán diskrétní signál $f(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(k+4i) \quad i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, **kde** $g(k) = \sum_{n=0}^{3} n\delta(k-n)$

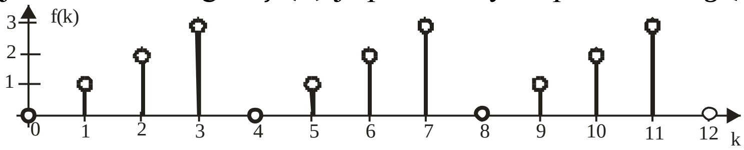
(15b)

a) Načrtněte hodnoty signálu pro $k = 0,1,2,\ldots 12$. Ocejchujte osy.
b) Je tento signál periodický? Pokud ano, určete jeho periodu.
c) Vypočtěte spektrum tohoto signálu.

Řešení:

a)

Pro signál $g(k)$ platí:$g(k) = 0\delta(k-0) + 1\delta(k-1) + 2\delta(k-2) + 3\delta(k-3)$ a jeho ostatní hodnoty jsou nulové. Signál $f(k)$ je periodickým opakováním $g(k)$ s periodou $N = 4$



(3b)

b)

Z obrázku je patrno, že signál je periodický a má periodu $N = 4$. **(2b)**

c)

Pro výpočet koeficientů diskrétní Fourierovy řady platí

$$c_m = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left[f(0)e^{-jm\frac{2\pi}{4}0} + f(1)e^{-jm\frac{2\pi}{4}1}f(2)e^{-jm\frac{2\pi}{4}2} + +f(3)e^{-jm\frac{2\pi}{4}3}\right] \quad m = 0,1,2,3.$$

$$c_m = \frac{1}{4}\left[f(0)e^{-jm\frac{2\pi}{4}0} + f(1)e^{-jm\frac{2\pi}{4}1}f(2)e^{-jm\frac{2\pi}{4}2} + f(3)e^{-jm\frac{2\pi}{4}3}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1e^{-jm\frac{\pi}{2}1}2e^{-jm\frac{\pi}{2}2} + 3e^{-jm\frac{\pi}{2}3}\right]$$

$$c_0 = \frac{1}{4}\left[1e^{-j0\frac{\pi}{2}1} + 2e^{-j0\frac{\pi}{2}2} + 3e^{-j0\frac{\pi}{2}3}\right] = \frac{1}{4}[1+2+3] = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

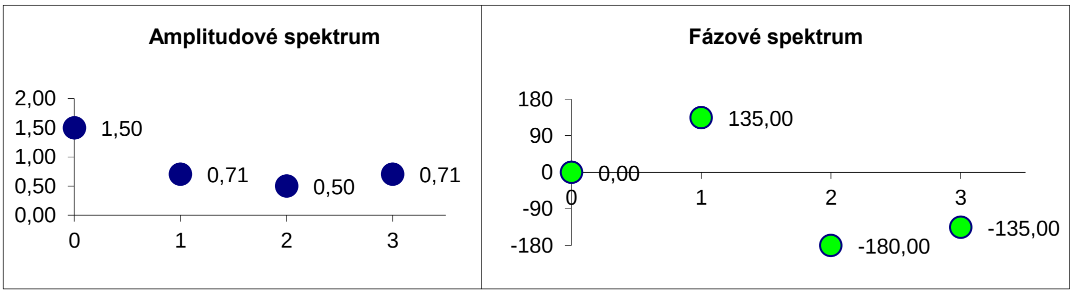
$$c_1 = \frac{1}{4}\left[1e^{-j1\frac{\pi}{2}1} + 2e^{-j1\frac{\pi}{2}2} + 3e^{-j1\frac{\pi}{2}3}\right] = \frac{1}{4}[-j-2+3j] = \frac{-1+j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\left[1e^{-j2\frac{\pi}{2}1} + 2e^{-j2\frac{\pi}{2}2} + 3e^{-j2\frac{\pi}{2}3}\right] = \frac{1}{4}[-1+2-3] = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\left[1e^{-j3\frac{\pi}{2}1} + 2e^{-j3\frac{\pi}{2}2} + 3e^{-j3\frac{\pi}{2}3}\right] = \frac{1}{4}[+j-2-3j] = \frac{-1-j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

(5b)

d)



(5b)

2015 B/K SAS, 1.termín A 15.1.2016	Jméno:	ID=

4. Spojitý systém má diferenciální rovnici $12y'' + 7y' + y = u'$. **(20b)**

a) Vypočtěte jeho operátorový přenos.

b) Vypočtěte jeho přechodovou charakteristiku.

c) Načrtněte jeho přechodovou charakteristiku. Obrázek zdůvodněte výpočtem.

d) Na vstupu systému je tvarovač 0. řádu. Určete jeho ekvivalentní Z přenos pro vzorkovací periodu T.

Řešení :

a)

Pro operátorový přenos platí

$12p^2Y(p) + 7pY(p) + Y(p) = pU(p)$

$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p}{12p^2+7p+1} = \frac{p}{(4p+1)(3p+1)}$ **(3b)**

b)

$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}F(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(4p+1)(3p+1)}\right\}$ Rozložíme na parciální zlomky: Bude

$\frac{1}{(4p+1)(3p+1)} = \frac{A}{(4p+1)} + \frac{B}{(3p+1)} = \frac{A(3p+1)+B(4p+1)}{(4p+1)(3p+1)} = \frac{p(3A+4B)+(A+B)}{(4p+1)(3p+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3A + 4B = 0 \quad A + B = 1 \Rightarrow A = 1 - B \quad 3(1 - B) + 4B = 0 \Rightarrow B = -3; A = 4$. Takže

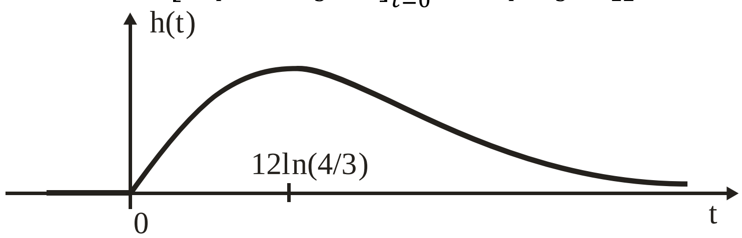
$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(4p+1)} - \frac{3}{(3p+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1/4)} - \frac{1}{(p+1/3)}\right\} = e^{-\frac{t}{4}} - e^{-\frac{t}{3}} \quad t \geq 0$ a

$h(t) = 0 \quad t < 0.$ **(5b)**

c)

Pro průběh přechodové charakteristiky platí $h(0) = 0 \quad h(\infty) = 0$. Pro extrémy platí $h'(t) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}} = \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}} \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{t}{3}}e^{-\frac{t}{4}} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow e^{\frac{t}{12}} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow t = 12\ln\frac{4}{3} > 0$ a přechodová charakteristika má jen jeden extrém, a to na kladné ose času. Dále je zřejmé, že $h(t) > 0 \quad t \in (0, +\infty)$ a tedy hodnota extrému musí být kladná. Pro směrnici $h(t)$ v počátku platí

$h'(t = 0) = \left[-\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}\right]_{t=0} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12} > 0$. Proto:



(6b)

d)

Vzorkováním tohoto průběhu s periodou T obdržíme:

$h(kT) = h(t)|_{t=kT} = e^{-\frac{kT}{4}} - e^{-\frac{kT}{3}} = \left(e^{-\frac{T}{4}}\right)^k - \left(e^{-\frac{T}{3}}\right)^k$. Pro Z obraz této posloupnosti bude platit:

$\mathcal{Z}\{h(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{T}{4}}\right)^k z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{T}{3}}\right)^k z^{-k} =$

$= \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-\frac{T}{4}}} - \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-\frac{T}{3}}} = \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{4}}} - \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{3}}}$

Pro ekvivalentní $\mathcal{Z}$ přenos diskretizovaného systému pak platí:

$F_e(z) = \frac{z-1}{z}H(z) = \frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{z-e^{-T/4}} - \frac{z}{z-e^{-T/3}}\right] = \frac{z-1}{z-e^{-T/4}} - \frac{z-1}{z-e^{-T/3}}$ **(6b)**