ISPS, Termín 3, 2014/15	Jméno	ID

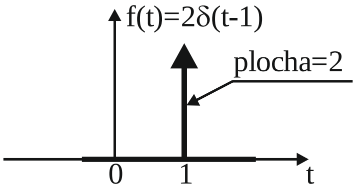
1. Je dán signál se spojitým časem $f(t) = A\delta(t-\tau)$ kde $\delta(t)$ je Diracův impuls a $A = 2, \tau = 1$. (**15 b**)

a) Načrtněte průběh signálu (3b). Popište osy a v obrázku vyznačte konstantu A (1b). (**4b**)
b) Určete, zda je signál periodický (**1b**) .
c) Vypočtěte jeho frekvenční spektrum (**5b**).
d) Načrtněte amplitudové (**2b**) a fázové **(2b)** spektrum. Popište osy (**1b**)

Pomůcka (filtrační vlastnost Diracova impulsu): $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)\,dt = f(a)$

Řešení:

a) Plocha Diracova impulsu=A=2.



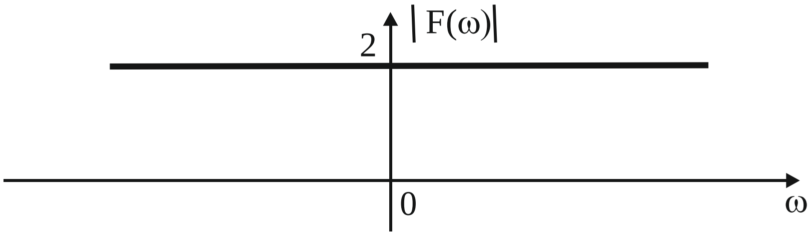
b) Signál není periodický.

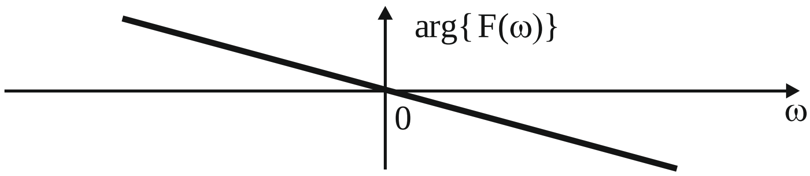
c) Spektrum určíme jako jeho Fourierovu transformaci s využitím pomůcky. Platí

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-1) e^{-j\omega t} dt = 2 e^{-j\omega t}\Big|_{t=1} = 2e^{-j\omega}$$

d) Pro amplitudové a fázové spektrum platí:

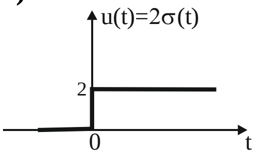
$$|F(\omega)| = 2; \quad \Phi(\omega) = \arg\{F(\omega)\} = \arctan\left(\frac{-\sin\omega}{\cos\omega}\right) = -\arctan(\tan\omega) = -\omega$$

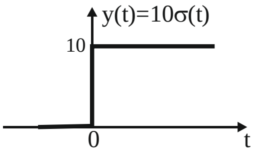




2. Na vstupu spojitého systému působí signál $u(t)=2\sigma(t)$ a na výstupu systému je signál $y(t)=10\sigma(t)$.
(**20b**)
a) Načrtněte vstupní a výstupní signál (2b). Popište osy (1b). (**3b**)
b) Určete operátorový přenos systému (1b) a diferenciální rovnici systému (1b). (**2b**).
c) Načrtněte rozložení pólů a nul (3b). Popište osy (1b) a rozhodněte o stabilitě (1b) . (**5b**)
d) Vypočtěte (**2b**) a načrtněte (**2b**) impulsovou charakteristiku. Popište osy (1b). (**5b**)
e) Načrtněte frekvenční charakteristiku v komplexní rovině. Popište osy (1b). (**5b**).

Řešení
a)

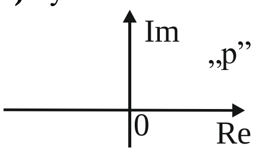




b) Pro operátorový přenos a diferenciální rovnici platí

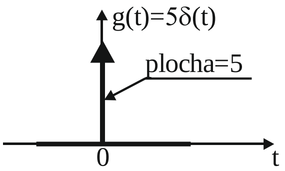
$$F(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{\mathscr{L}\{y(t)\}}{\mathscr{L}\{u(t)\}}=\frac{10/p}{2/p}=5 \quad\Rightarrow\quad Y(p)=5U(p) \quad\Rightarrow\quad y(t)=5u(t)$$

c) Systém nemá žádný pól a žádnou nulu. Systém je stabilní.

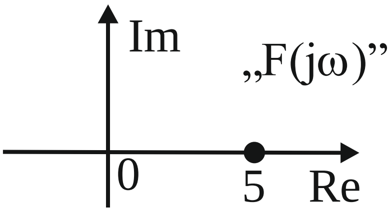


d) Pro impulsovou charakteristiku platí

$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=\mathscr{L}^{-1}\{5\}=5\delta(t)$$



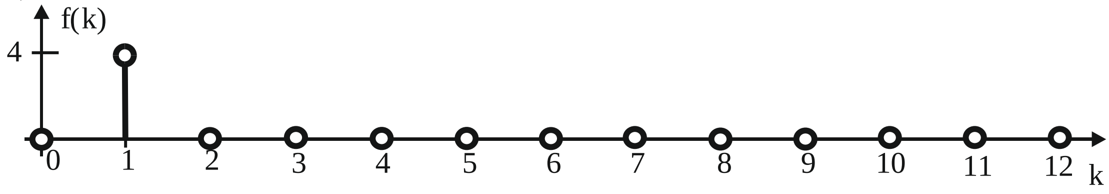
e) Pro frekvenční přenos platí:
$F(j\omega)=5=5e^{-j0} \quad\Rightarrow\quad |F(j\omega)|=5; \quad \Phi(\omega)=0$. Frekvenční charakteristika je jeden jediný bod na reálné ose ve vzdálenosti 5 od počátku v komplexní rovině „$F(j\omega)$". Systém zesiluje všechny frekvence $\omega\in(0,\infty)$ pětkrát.



3. Pro diskrétní neperiodický signál s délkou $N=4$ platí:
$f(k)=4\left[\sigma(k)-\sigma(k-4)\right]\delta(k-1), \quad k=(-\infty,+\infty)$. **(15b)**

a) Načrtněte hodnoty signálu pro $k=0,1,2,\ldots 12$. Ocejchujte osy. (**3b**)
b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu. (**4b**)
c) Načrtněte amplitudové (**4b**) a fázové (**4b**) spektrum tohoto signálu. Ocejchujte osy.

Řešení
a)



b) Pro výpočet koeficientů diskrétní Fourierovy transformace platí

$F(m)=\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{4}k} \quad m=0,1,2,3$. Jelikož $f(1)=4, f(0)=f(2)=f(3)=0$ bude

$$F(m)=f(1)e^{-jm\frac{2\pi}{4}1}=4e^{-jm\frac{\pi}{2}}=4(-j)^m \quad m=0,1,2,3$$

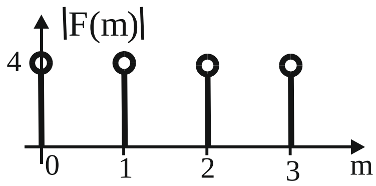
$$F(0)=4(-j)^0=4 \qquad |F(0)|=4 \qquad \arg F(0)=0$$

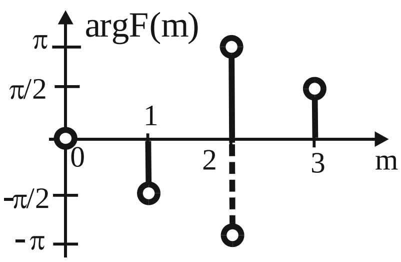
$$F(1)=4(-j)^1=-4j \qquad |F(1)|=4 \qquad \arg F(1)=-\pi/2$$

$$F(2)=4(-j)^2=-4 \qquad |F(2)|=4 \qquad \arg F(2)=\pm\pi$$

$$F(3)=4(-j)^3=+4j \qquad |F(3)|=4 \qquad \arg F(3)=+\pi/2$$

c)





4. Lineární diskrétní systém má na svém vstupu signál $u(k) = 2\sigma(k)$ a na výstupu signál $y(k) = 10\delta(k)$. (**20b**)

a. Určete *Z* přenos systému (1b) a diskutujte jeho realizovatelnost. (**5b**)
b. Načrtněte rozložení pólů a nul (1b). Popište osy (1b). **2b**)
c. Určete diferenční rovnici systému (1b). Vyjádřete slovně činnost tohoto systému.(**5b**)
d. Doplňte do systému jeden jednoduchý pól o velikosti 0 a jeden dvojnásobný pól o velikosti +1. (**3b**)
e. Určete impulsovou charakteristiku takto upraveného systému a načrtněte ji pro $k = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ (2b). Popište a ocejchujte osy (1b). (**5b**)

Řešení

a) Pro operátorový přenos platí:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y(k)\}}{\mathcal{Z}\{u(k)\}} = \frac{10}{2z/(z-1)} = 5\frac{z-1}{z}$$

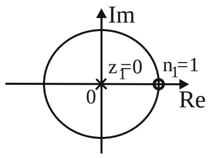
Stupeň čitatele je roveň stupni jmenovatele- systém je realizovatelný.

b) Pro diferenční rovnici platí

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = 5\frac{z-1}{z} = 5\left(1-z^{-1}\right) \quad \Rightarrow \quad Y(z) = 5\left(1-z^{-1}\right)U(z) \quad \Rightarrow \quad y(k) = 5\left[u(k)-u(k-1)\right]$$

Systém provede diferenci dvou po sobě jdoucích vstupních hodnot a tento rozdíl vynásobí 5.

c) Systém má jednu nulu $n_1 = 1$ a jeden pól $z_1 = 0$.

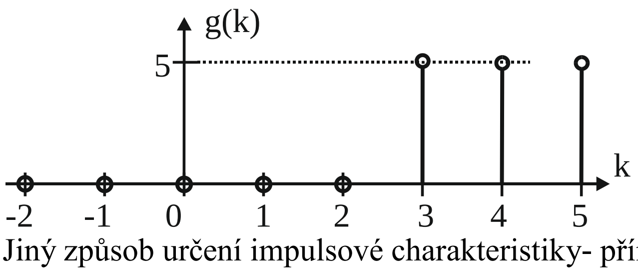


d) Takto doplněný systém bude mít operátorový přenos:

$$F_1(z) = \frac{F(z)}{z(z-1)^2} = 5\frac{z-1}{z}\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{5}{z^2(z-1)}$$

e)

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F_1(z)\} = 5\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{5}{z^2(z-1)}\right\} = 5\mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-3}\frac{z}{z-1}\right\} = 5\sigma(k-3)$$



Jiný způsob určení impulsové charakteristiky- přímým řešením diferenční rovnice

$$F_1(z) = 5z^{-2}\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = 5\frac{z^{-3}}{1-z^{-1}} = \frac{Y(z)}{U(z)} \Rightarrow Y(z)\left(1-z^{1}\right) = 5z^{-3}U(z) \Rightarrow y(k) = y(k-1) + 5u(k-3)$$

$k = 0 \qquad y(0) = y(0-1) + 5u(0-3) = 0 + 5\times 0 = 0$

$k = 1 \qquad y(1) = y(1-1) + 5u(1-3) = 0 + 5\times 0 = 0$

$k = 2 \qquad y(2) = y(2-1) + 5u(2-3) = 0 + 5\times 0 = 0$

$k = 3 \qquad y(3) = y(3-1) + 5u(3-3) = 0 + 5\times 1 = 5$