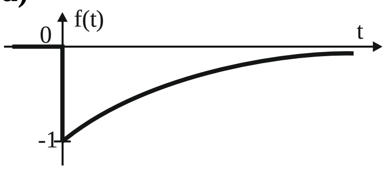
| | | |
|---|---|---|
| **ISPP, Termín 2, 2014/15, 70b** | Jméno | ID |

**1. Je dán signál se spojitým časem** $f(t) = -\sigma(t)e^{-2t}, t \in (-\infty, +\infty)$. (**15 b**)

a) Načrtněte průběh signálu (**3b**). Popište osy (**1b**)
b) Určete, zda je signál periodický (**1b**).
c) Vypočtěte jeho frekvenční spektrum (**5b**).
d) Načrtněte amplitudové (**2b**) a fázové **(2b)** spektrum. Popište osy (**1b**)

**Řešení:**
**a)**




**b)** Signál není periodický.
**c)** Spektrum určíme jako jeho Fourierovu transformaci signálu. Platí

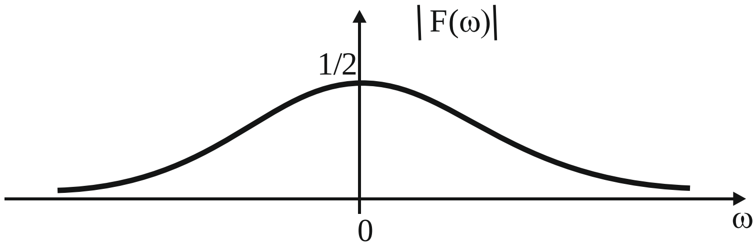
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = -\int_0^{\infty} e^{-2t}e^{-j\omega t}dt = -\int_0^{\infty} e^{-(2+j\omega)t}dt = -\left[\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{(2+j\omega)}(0-1) =$$

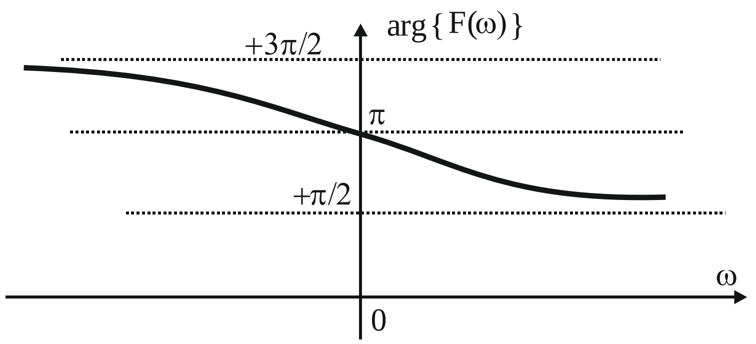
$$= \frac{-1}{2+j\omega} = \frac{-1}{2+j\omega}\frac{2-j\omega}{2-j\omega} = \frac{-2+j\omega}{4+\omega^2}$$

**d)** Pro amplitudové a fázové spektrum platí:

$$|F(\omega)| = \left|-\frac{1}{2+j\omega}\right| = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}} \qquad |F(0)| = 1/2 \quad |F(\pm\infty)| = 0 \quad \frac{d|F(\omega)|}{d\omega} = \frac{-\left(4+\omega^2\right)^{-1/2}\omega}{\left(4+\omega^2\right)} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \omega = 0$$

$$\Phi(\omega) = \arg\left\{\frac{-1}{2+j\omega}\right\} = \arg\{-1\} - \arg\{2+j\omega\} = \pm\pi - \arctan\frac{\omega}{2} =$$



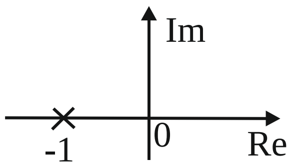



**2. Spojitý dynamický systém nemá žádnou nulu, má jeden pól** $p_1 = -1$ a poměr koeficientů u nejvyšších mocnin čitatele a jmenovatele operátorového přenosu je roven 10. (**20 b)**

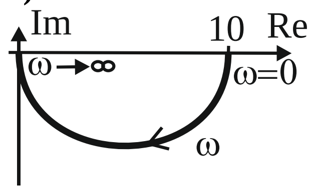
a) Načrtněte rozložení pólů a nul (**1b**), rozhodněte o stabilitě **(1b**).
b) Určete operátorový přenos systému (**3b**).
c) Určete diferenciální rovnici systému (**2b**). Označte výstup systému $y(t)$ a vstup systému $u(t)$.
d) Načrtněte frekvenční charakteristiku v komplexní rovině, vyznačte body $\omega = 0, \omega \to \infty$ (**3b**)
e) Vypočtěte (**2b**) a načrtněte (**2b**) impulsovou charakteristiku. Popište osy (**1b**).
f) Vypočtěte (**2b**) a načrtněte (**2b**) přechodovou charakteristiku. Popište osy (**1b**).

**Řešení**

**a)** Rozložení pólů a nul




**d)** Frekveční charakteristika



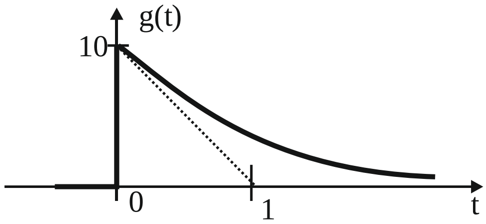

Pól leží v levé polovině- systém je stabilní.

**b)** Pro operátorový přenos platí: $F(p) = \dfrac{10}{p+1}$

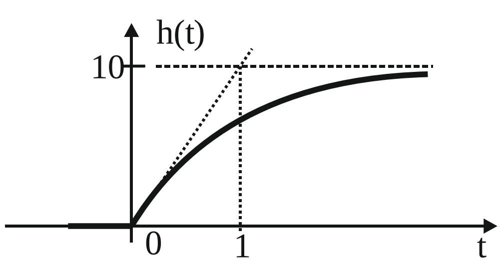
**c)** Pro diferenciální rovnici platí:

$$F(p) = \frac{10}{p+1} = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad \Rightarrow \quad Y(p)(p+1) = 10U(p) \quad \Rightarrow \quad y'(t) + y(t) = 10u(t)$$

**e)** $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{10}{p+1}\right\} = \begin{cases} 10e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$




**f)** $h(t) = \int_0^t g(\tau)\,d\tau = 10\int_0^t e^{-\tau}d\tau = 10\left[\dfrac{e^{-\tau}}{-1}\right]_0^t = 10(1-e^{-t}), \quad t \geq 0; \quad h(t) = 0, \quad t < 0$

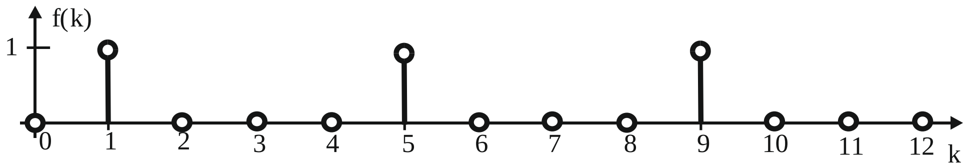


**3. Pro diskrétní signál platí:** $f(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\delta(k-1-4i),\quad k=(-\infty,+\infty)$. (**15b**)

a) Načrtněte hodnoty signálu pro $k=0,1,2,\dots 12$. Ocejchujte osy. (**3b**)
b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu. (**4b**)
c) Načrtněte amplitudové (**4b**) a fázové (**4b**) spektrum tohoto signálu. Ocejchujte osy.

**Řešení**
**a)**

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\delta(k-1-4i)=....+\delta(k-1-4\times 0)+\delta(k-1-4\times 1)+\delta(k-1-4\times 2)+...$$




**b)** Pro výpočet koeficientů diskrétní Fourierovy řady platí

$$c_m=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{4}k}\quad m=0,1,2,3.$$ Jelikož $f(1)=1, f(0)=f(2)=f(3)=0$ bude

$$c_m=\frac{1}{4}f(1)e^{-jm\frac{2\pi}{4}1}=\frac{1}{4}e^{-jm\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}(-j)^m\quad m=0,1,2,3$$

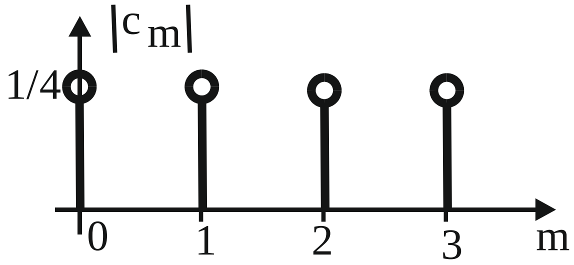
$c_0=(-j)^0/4=1/4 \qquad |c_0|=1/4 \qquad \arg c_0=0$

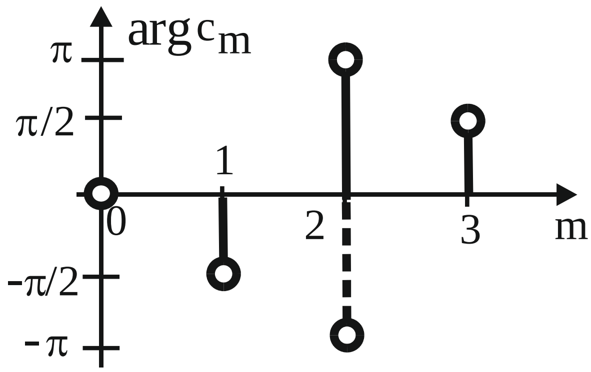
$c_1=(-j)^1/4=-j/4 \qquad |c_1|=1/4 \qquad \arg c_1=-\pi/2$

$c_2=(-j)^2/4=-1/4 \qquad |c_2|=1/4 \qquad \arg c_2=\pm\pi$

$c_3=(-j)^3/4=+j/4 \qquad |c_3|=1/4 \qquad \arg c_3=+\pi/2$

**c)**

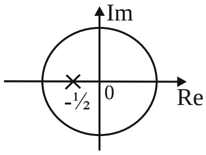


**4. Diskrétní systém nemá žádnou nulu a má jeden pól** $z_1 = -1/2$ a poměr koeficientů u nejvyšších mocnin operátorového přenosu je roven jedné. (**20b**)

a) Načrtněte rozložení pólů a nul (**1b**) a rozhodněte o jeho stabilitě. (**1b**)
b) Určete jeho operátorový přenos **(3b)**
c) Určete jeho diferenční rovnici. (**2b**)
d) Vypočtěte (**3b**) a načrtněte (**3b**) jeho impulsovou charakteristiku pro $k = 0,1,2,3,4$.
e) Vypočtěte (**4b**) a načrtněte (**3b**) jeho přechodovou charakteristiku pro $k = 0,1,2,3,4$.

**Řešení**
**a)** Systém má jeden pól $z_1 = -1/2$ a žádnou nulu. Pól leží uvnitř jednotkové kružnice, a proto je systém stabilní.




**b)** Platí: $F(z) = \dfrac{1}{z+1/2}$

**c)** Platí

$$F(z) = \frac{1}{z+1/2}\frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1+1/2z^{-1}} = \frac{Y(z)}{U(z)} \Rightarrow Y(z)\left[1+1/2z^{-1}\right] = z^{-1}U(z) \Rightarrow y(k)+1/2y(k-1) = u(k-1)$$

**d) Způsob 1 – výpočet z operátorového přenosu.** Platí

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[F(z)\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z+1/2}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[z^{-1}\frac{z}{z-(-1/2)}\right] = \begin{cases}(-1/2)^{k-1} & k \ge 1 \\ 0 & k < 1\end{cases}$$

$$g(0) = 0 \quad g(1) = (-1/2)^{1-1} = 1 \quad g(2) = (-1/2)^{2-1} = -1/2 .$$

$$g(3) = (-1/2)^{3-1} = 1/4 \quad g(4) = (-1/2)^{4-1} = -1/8$$

**d) Způsob 2 – dělení polynomů**

| čitatel | | jmenovatel | | podíl | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z^1 | z^0 | z^1 | z^0 | z^0 | z^(-1) | z(-2) | z^(-3) | z^(-4) |
| 0 | 1 | 1 | 0,5 | 0,000 | 1,000 | -0,500 | 0,250 | -0,125 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | |
| 0 | 1 | | | |
| | 1 | 0,5 | | |
| | 0 | -0,5 | | |
| | | -0,5 | -0,25 | |
| | | 0 | 0,25 | |
| | | | 0,25 | 0,125 |
| | | | 0 | -0,125 |

**d) Způsob 3 – postupným řešením diferenční rovnice**

$$y(k) = -1/2y(k-1) + u(k-1) \quad pro \quad u(k) = \delta(k)$$

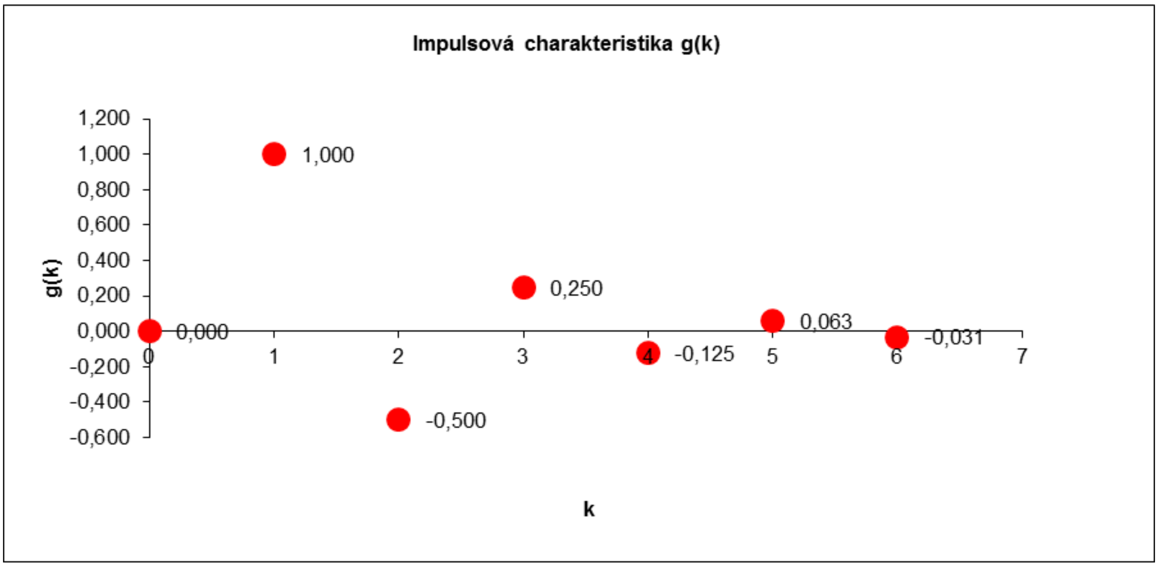
$$k = 0 \quad y(0) = -1/2y(0-1) + u(0-1) = 0 + 0 = 0$$

$$k = 1 \quad y(1) = -1/2y(1-1) + u(1-1) = 0 + 1 = 1$$

$$k = 2 \quad y(2) = -1/2y(2-1) + u(2-1) = -1/2 + 0 = -1/2$$

$$k = 3 \quad y(3) = -1/2y(3-1) + u(3-1) = (-1/2)(-1/2) + 0 = 1/4$$

$$k = 4 \quad y(4) = -1/2y(4-1) + u(4-1) = (-1/2)(1/4) + 0 = -1/8$$




**e)** Platí

$$h(k) = \sum_{i=0}^{k} g(i) = \sum_{i=0}^{k-1} g(i) + g(k) = h(k-1) + g(k)$$

$$h(0) = g(0) = 0$$

$$h(1) = h(0) + g(1) = 0 + 1 = 1$$

$$h(2) = h(1) + g(2) = 1 - 1/2 = 1/2$$

$$h(3) = h(2) + g(3) = 1/2 + 1/4 = 3/4$$

$$h(4) = h(3) + g(4) = 3/4 - 1/8 = 5/8$$