ISPP, Termín 1, 13.5.2015, 70 b	Jméno	ID

1. Je dán signál $f(t)=1-2\sin 2\pi t-2\cos 4\pi t,\quad t\in(-\infty,+\infty)$.

a) Pokud je signál periodický určete základní periodu signálu. (**2b**)
b) Určete jeho frekvenční spektrum. (**5b**)
c) Načrtněte amplitudové (**3b**) a fázové (**3b**) frekvenční spektrum. Ocejchujte osy.
d) Jaká je střední hodnota tohoto signálu. (**1b**)
e) Které harmonické složky tento signál obsahuje. (**1b**) **Celkem 15b**

Řešení:

a) $f(t)=1-2\sin 2\pi t-2\cos 4\pi t=1-2\sin\omega_0 t-2\cos\omega_1 t \quad\Rightarrow\quad \omega_1=2\omega_0$

Signál je periodický, $\omega_0=\dfrac{2\pi}{P}=2\pi\Rightarrow P=1[s]$

b)

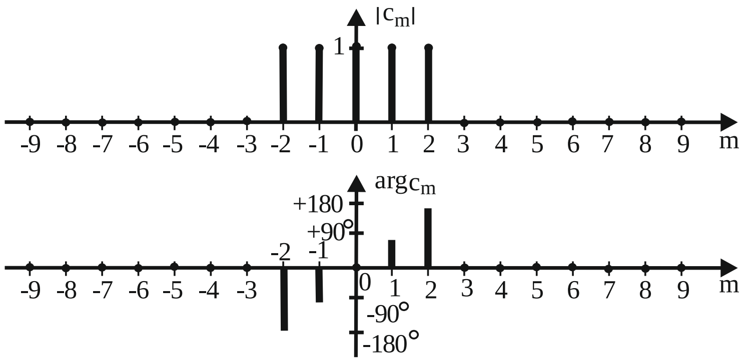
$$f(t)=1-2\frac{e^{j2\pi t}-e^{-j2\pi t}}{2j}-2\frac{e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t}}{2}=1-\frac{1}{j}e^{j2\pi t}+\frac{1}{j}e^{-j2\pi t}-e^{j4\pi t}-e^{-j4\pi t}=$$

$$=1+je^{j2\pi t}-je^{-j2\pi t}-e^{j4\pi t}-e^{-j4\pi t}=-e^{-j4\pi t}-je^{-j2\pi t}+1+je^{j2\pi t}-e^{j4\pi t}$$

$c_0=1\quad c_{-1}=-j\quad c_{+1}=+j\quad c_{-2}=c_{+2}=-1$ ostatní koeficienty jsou nulové.

c) $|c_0|=1\quad |c_{-1}|=|c_{+1}|=|c_{-2}|=|c_{+2}|=1$

$\arg\{c_0\}=0\quad \arg\{c_{-1}\}=-90^\circ\quad \arg\{c_{+1}\}=+90^\circ\quad \arg\{c_{-2}\}=\arg\{c_{+2}\}=\pm180^\circ$



d) Střední hodnota je rovna 1.
e) Signál obsahuje první a druhou harmonickou složku.

2. Pro impulsní charakteristiku spojitého systému platí $g(t)=10\left(1-e^{-t}\right)\quad pro\ t>0$.

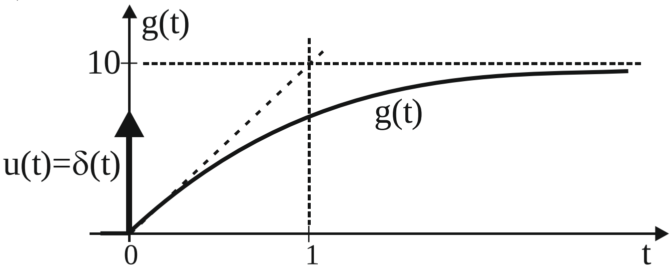
a) Načrtněte tuto charakteristiku. (**4b**)
b) Určete operátorový přenos systému. (**3b**)
c) Určete frekvenční přenos systému. (**3b**)

d) Načrtněte asymptotickou amplitudovou (**4b**) a fázovou (**4b**) frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Ocejchujte osy.

e) Určete diferenciální rovnici systému**. (2b)** **Celkem 20b**

Řešení:

a)



b) $F(p) = \mathscr{L}\{g(t)\} = \mathscr{L}\left\{10\left(1-e^{-t}\right)\right\} = 10\mathscr{L}\left\{1-e^{-t}\right\} = \frac{10}{p} - \frac{10}{p+1} = \frac{10}{p(p+1)}$

c) $F(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\omega\right)}$

d) Pro absolutní hodnotu frekvenčního přenosu platí:

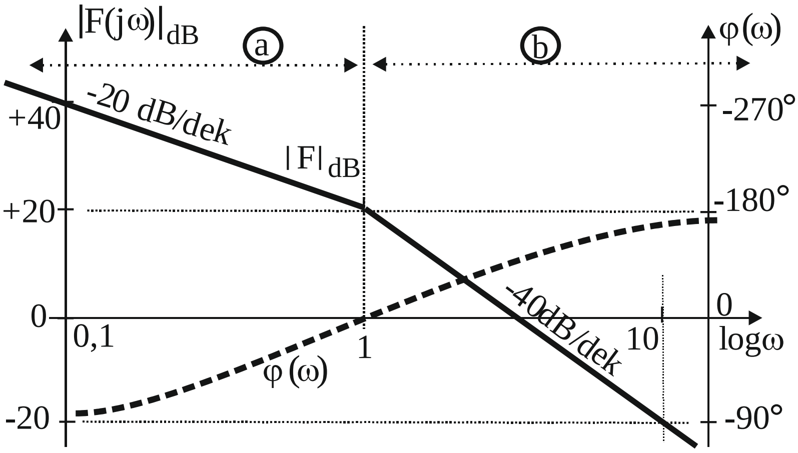
$$\left|F(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left|F(j\omega)\right| = 20\log 10 - 20\log\omega - 20\log\sqrt{\omega^2+1} = 20 - 20\log\omega - 20\log\sqrt{\omega^2+1}$$

Na charakteristice je jeden zlomový bod $\omega = 1$ a v jednotlivých oblastech platí:

Oblast a: $\omega \ll 1 \Rightarrow \left|F(j\omega)\right|_{dB} \approx 20 - 20\log\omega$

Oblast b: $\omega \gg 1 \Rightarrow \left|F(j\omega)\right|_{dB} \approx 20 - 20\log\omega - 20\log\omega = 20 - 40\log\omega$.

Pro fázi platí $\varphi(\omega) = -\pi/2 - \arctan\omega$.



e)

$$F(p) = \frac{10}{p(p+1)} = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad \Rightarrow p^2Y(p) + pY(p) = 10U(p) \quad / \mathscr{L}^{-1} \quad \Rightarrow y''(t) + y'(t) = 10u(t)$$

3. Je dán diskrétní signál $f(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}k} - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}, k \in (-\infty, +\infty)$ kde k je pořadové číslo vzorku a N je kladné celé číslo.

a) Ukažte, že tato posloupnost je periodická s periodou N (**5b**)

b) Určete reálnou a imaginární část tohoto signálu (užijte Eulerovy vztahy) (**5b**).
c) Načrtněte jednu periodu imaginární části tohoto signálu pro $N=8$ (**5b**).

Celkem (**15b**)

Řešení

a)

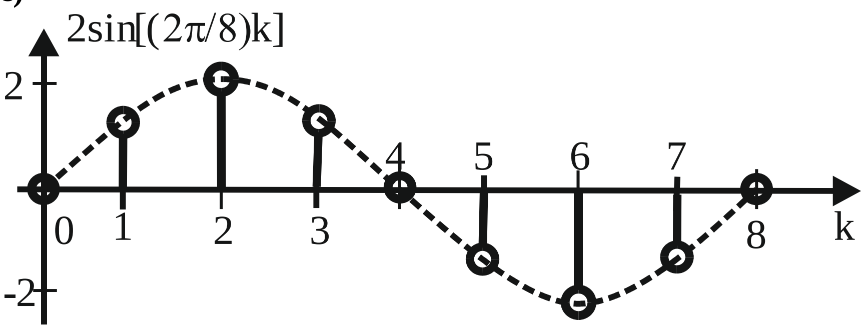
$$f(k+N)=e^{j\frac{2\pi}{N}(k+N)}-e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N)}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}e^{j\frac{2\pi}{N}N}-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}e^{-j\frac{2\pi}{N}N}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}e^{j2\pi}-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}e^{-j2\pi}=$$
$$=e^{j\frac{2\pi}{N}k}-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}=f(k)$$

b) Podle Eulerova vztahu platí

$$f(k)=e^{j\frac{2\pi}{N}k}-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}=\left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)+j\sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right]-\left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)-j\sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right]=$$
$$=2j\sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right)=2j\sin\left(\frac{2\pi}{8}k\right)$$

Reálná část signálu je nulová.

c)



4. Diskrétní systém je popsán svojí přechodovou charakteristikou $h(k)=\begin{cases}2k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$.

a) Načrtněte přechodovou charakteristiku pro $k=-1,0,1,2,3,4$. Ocejchujte osy. (**4b**)

b) Určete impulsovou charakteristiku systému pro $k \in \langle 0, \infty)$ a načrtněte ji pro $k = -1, 0, 1, 2, 3, 4$. Ocejchujte osy. (**5b**)

c) Určete operátorový přenos systému. (**5b**)

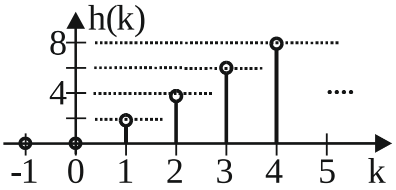
d) Napište diferenční rovnici systému. (**4b**)

e) Načrtněte rozložení pólů a nul a rozhodněte o stabilitě systému. (**2b**)

Celkem 20b

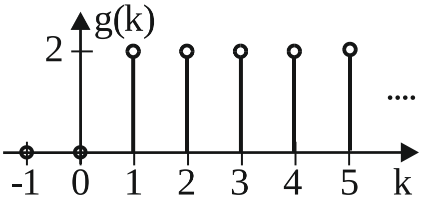
Řešení:

a) Přechodová charakteristika:



b) Pro impulsovou charakteristiku platí:

$$g(0) = h(0) = 0, \quad g(k) = h(k) - h(k-1) = 2k - 2(k-1) = 2 \;\; k = 1, 2, \ldots \;\; \Rightarrow \;\; g(k) = \begin{cases} 0 & k \le 0 \\ 2 & k > 0 \end{cases}$$



c) Pro operátorový přenos platí:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{g(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2z^{-k} = 2\left[\sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} - 1\right] = 2\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - 1\right] = 2\frac{1-1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{2}{z-1}$$

d) Pro diferenční rovnici platí:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2z^{-1}}{1-z^{-1}} \;\; \Rightarrow \;\; Y(z)\left(1-z^{-1}\right) = 2z^{-1}U(z) \;\; \Rightarrow \;\; y(k) - y(k-1) = 2u(k-1)$$

e) Systém nemá žádnou nulu a jeden pól $z_1 = 1$, který leží na jednotkové kružnici a proto je systém na mezi stability.