2014 B/K SAS, 3.termín 5.2.2015	Jméno:	ID=

1. Je dán spojitý signál $f(t)=te^{-a|t|},\ t\in(-\infty,+\infty), a>0$. **(15b)**

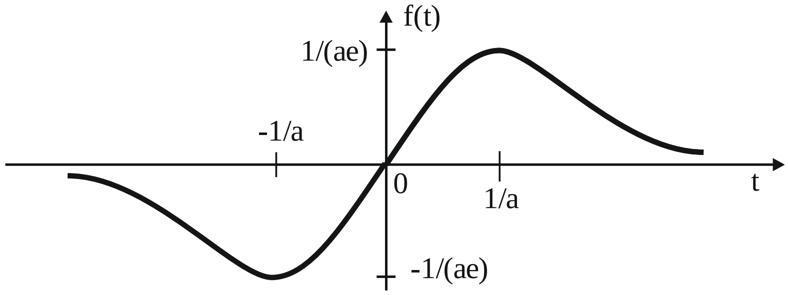
a) Načrtněte časový průběh signálu. Rozhodněte, zda je signál periodický. V případě, že ano, určete jeho základní periodu P a základní kmitočet ω_0. (**5b)**

b) Vypočtěte spektrum signálu. (**5b)**

c) Určete hodnotu spektra v bodě $\omega=0$. Jak se nazývá tato hodnota? (**5b)**

Řešení:

a) Časový průběh signálu: Platí $f(0)=0, f(\pm\infty)=0, f(-t)=f(t)$ funkce je lichá. Pro $t\geq 0$ platí:
$f'(t)=df(t)/dt=e^{-at}-ate^{-at}=(1-at)e^{-at}, f'(0)=1$ a pro extrém platí $(1-at)=0\Rightarrow t=1/a$ a hodnota v tomto extrému je $f(1/a)=1/(ae)$. Signál není periodický



b) Spektrum signálu:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0} te^{+at}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} te^{-at}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0} te^{+(a-j\omega)t}dt+\int_{0}^{\infty} te^{-(a+j\omega)t}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=t & u'=1 \\ v'=e^{+(a-j\omega)t} & v=\dfrac{e^{+(a-j\omega)t}}{(a-j\omega)}\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} u=t & u'=1 \\ v'=e^{-(a+j\omega)t} & v=\dfrac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\end{matrix}\right|=\left[t\frac{e^{+(a-j\omega)t}}{(a-j\omega)}\right]_{-\infty}^{0}-\frac{1}{(a-j\omega)}\int_{-\infty}^{0} e^{+(a-j\omega)t}dt+$$

$$+\left[t\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right]_{0}^{\infty}+\frac{1}{(a+j\omega)}\int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt=-\frac{1}{(a-j\omega)}\left[\frac{e^{+(a-j\omega)t}}{(a-j\omega)}\right]_{-\infty}^{0}+\frac{1}{(a+j\omega)}\left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right]_{0}^{\infty}=$$

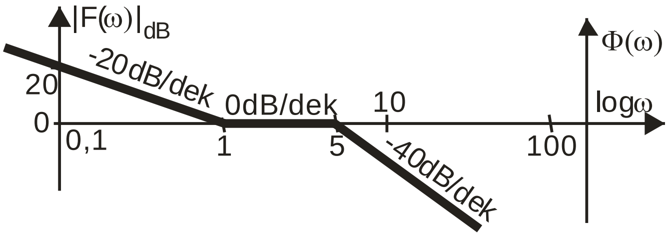
$$=-\frac{1}{(a-j\omega)^2}+\frac{1}{(a+j\omega)^2}=\frac{(a+j\omega)^2-(a-j\omega)^2}{\left[(a-j\omega)(a+j\omega)\right]^2}=\frac{(a+j\omega+a-j\omega)(a+j\omega-a+j\omega)}{\left(a^2+\omega^2\right)^2}=\frac{4ja\omega}{\left(a^2+\omega^2\right)^2}$$

c) Hodnota spektra v bodě $\omega=0$ (stejnosměrná složka):

$F(\omega)\big|_{\omega=0}=\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=0$ neboť signál je lichou funkcí.

2014 B/K SAS, 3.termín 5.2.2015	Jméno:	ID=

2. Spojitý systém, který nemá dopravní zpoždění, má asymptotickou amplitudovou frekvenční charakteristiku uvedenou na obrázku. (**20b**)



a) Určete operátorový přenos systému (**5b**)
b) Napište diferenciální rovnici systému (**3b**)
c) Načrtněte rozložení pólů a nul tohoto systému. Popište osy. (**5b**)
d) Načrtněte fázovou charakteristiku tohoto systému (**7b**)

Řešení:

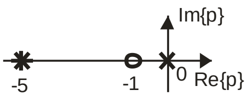
a) Vzhledem k tomu, že se jedná o systém bez dopravního zpoždění má operátorový přenos tvar $F(p)=\dfrac{K(T_1p+1)}{p(T_2p+1)^2}$ kde pro konstantu K platí $20\log\left.\dfrac{K}{\omega}\right|_{\omega=1}=20\log K=0dB \;\Rightarrow\; K=1$ a dále platí

$$\frac{1}{T_1}=1\Rightarrow T_1=1,\quad \frac{1}{T_2}=5\Rightarrow T_2=0,2 \quad\Rightarrow\quad F(p)=\frac{(p+1)}{p(0,2p+1)^2}$$

b)
$$F(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{(p+1)}{p(0,2p+1)^2}\Rightarrow Y(p)\,p(0,2p+1)^2=U(p)(p+1)\quad\Rightarrow$$

$$Y(p)\,p\left(0,04p^2+0,4p+1\right)=U(p)(p+1)\quad\Rightarrow\quad 0,04y'''(t)+0,4y''(t)+y'(t)=u'(t)+u(t)$$

c) Systém má tři póly $p_1=0;\ p_{2,3}=-1/0,2=-5$ a jednu nulu $n_1=-1$

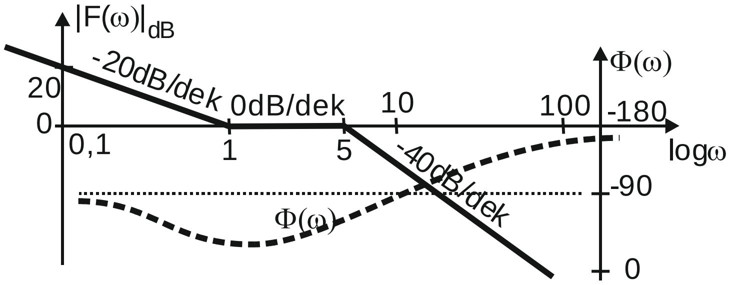


d) Pro fázovou charakteristiku platí $\Phi(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}+arctg\omega-2arctg0,2\omega$. Platí

$$\Phi(0)=-\frac{\pi}{2}+0-0=-\frac{\pi}{2},\quad \Phi(\infty)=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-2\frac{\pi}{2}=-\pi \text{ a pro extrém platí}$$

$$\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}\left(-\frac{\pi}{2}+arctg\omega-2arctg0,2\omega\right)=\frac{1}{1+\omega^2}-2\frac{0,2}{1+0,04\omega^2}=$$

$$=\frac{1+0,04\omega^2-0,4-0,4\omega^2}{\left(1+\omega^2\right)\left(1+0,04\omega^2\right)}\quad\Rightarrow\quad 0,6-0,36\omega^2=0\quad\Rightarrow\quad \omega=\sqrt{\frac{0,6}{0,36}}=\sqrt{\frac{60}{36}}=\frac{2\sqrt{15}}{6}\doteq\frac{4}{3}=1,3$$



2014 B/K SAS, 3.termín 5.2.2015	Jméno:	ID=

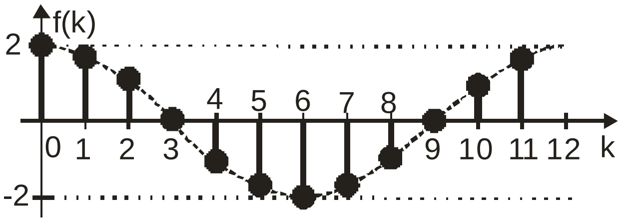
3. Je dán spojitý periodický signál $f(t) = A\sin(\omega_0 t + 5\pi/2)$ s parametry $A = 2, \omega_0 = 1$, který je třeba vzorkovat.
(**15b**)

a) Určete minimální vzorkovací kmitočet. Zvolte vzorkovací kmitočet jako šestinásobek minimálního vzorkovacího kmitočtu a určete počet vzorků v jedné periodě spojitého signálu.(**5b**)
b) Napište výraz pro vzorkovaný signál. Načrtněte jednu periodu vzorkovaného signálu. Popište a ocejchujte osy. (**3b**)
c) Vypočtěte spektrum takto vzorkovaného signálu. (**5b**)
d) Načrtněte amplitudové spektrum vzorkovaného signálu pro $m = 0,1,...N$. (**2b**)

Řešení:

a) Platí: $f(t) = A\sin(\omega_0 t + 5\pi/2) = A\cos(\omega_0 t)$. Jelikož nejvyšší kmitočet ve spektru spojitého signálu je $\omega_0 = 1$, je minimální vzorkovací kmitočet $\omega_{s\min} = 2\omega_0 = 2rad/\sec$. Pro vzorkovací kmitočet pak podle zadání platí $\omega_s = 6\omega_{s\min} = 12rad/\sec$. Perioda spojitého signálu je $P = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$, perioda vzorkovacího kmitočtu je $T_s = 2\pi/\omega_s = 2\pi/12 = \pi/6$. Pro počet vzorků v jedné periodě spojitého signálu platí $N = \dfrac{P}{T_s} = \dfrac{2\pi}{\pi/6} = 12$.

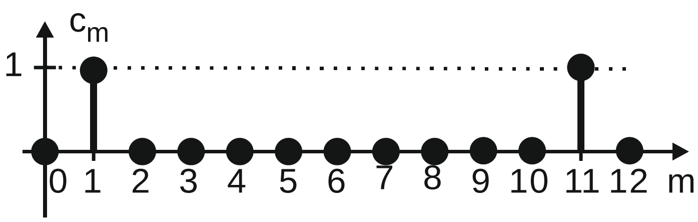
b) Platí $f(k) = A\cos\dfrac{2\pi}{12}k = A\cos\dfrac{\pi}{6}k \quad k \in (-\infty, +\infty)$.



c) Platí

$$f(k) = A\cos\frac{2\pi}{12}k = A\frac{e^{j\frac{2\pi}{12}k} + e^{-j\frac{2\pi}{12}k}}{2} = \frac{A}{2}e^{j1\frac{2\pi}{12}k} + \frac{A}{2}e^{-j(12-1)\frac{2\pi}{12}k} = \sum_{m=0}^{12-1} c_m e^{jm\frac{2\pi}{12}k} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_{11} = A/2 = 1$$

d) Amplitudové spektrum



2014 B/K SAS, 3.termín 5.2.2015	Jméno:	ID=

4. Diskrétní systém má impulsovou charakteristiku $g(k)=\sigma(k)-\sigma(k-N),\, N>0$. **(20b)**

a) Načrtněte $g(k)$ pro $k=0,1,2,\dots N-2, N-1, N, N+1$. (**5b**)

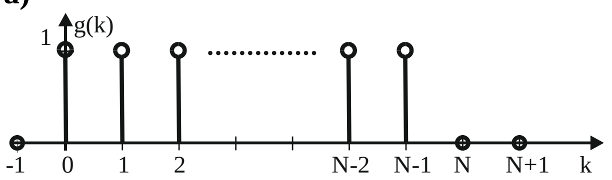
b) Vypočtěte a načrtněte přechodovou charakteristiku $h(k)$ pro $k=0,1,2,\dots N-2, N-1, N, N+1$. (**5b**)

c) Určete operátorový přenos systému. Pomůcka: $(a-b)^n=(a-b)\sum_{i=0}^{n-1}a^{n-1-i}b^i$ (**5b**)

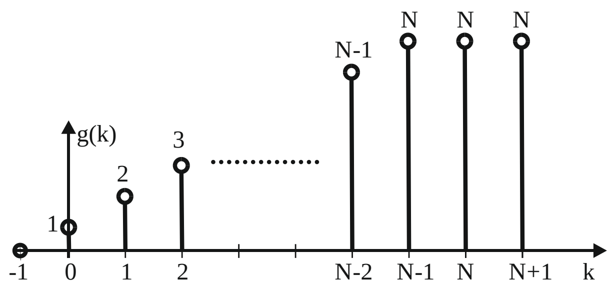
d) Rozhodněte o stabilitě a zdůvodněte. (**5b**)

Řešení

a)



b) Platí $h(k)=\sum_{i=0}^{k}g(i)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{k}1=k & k\in\langle 0,N-1\rangle\\ N & k\geq N\end{cases}$



c) Platí:

$$F(z)=\mathcal{Z}\{g(k)\}=\mathcal{Z}\{\sigma(k)-\sigma(k-N)\}=\left[\mathcal{Z}\{\sigma(k)\}-\mathcal{Z}\{\sigma(k-N)\}\right]=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-1}z^{-N}=\frac{z}{z-1}\left(1-z^{-N}\right)=$$

$$=\frac{z}{z-1}\frac{z^N-1}{z^N}=\frac{1}{z-1}\frac{(z-1)\sum_{i=0}^{N-1}z^{N-i-1}}{z^{N-1}}=\frac{\sum_{i=0}^{N-1}z^{N-i-1}}{z^{N-1}}=\frac{z^{N-1}+z^{N-2}+\dots z^1+1}{z^{N-1}}$$

Nebo jinak:

$$F(z)=\mathcal{Z}\{g(k)\}=\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^{N-1}\delta(k-i)\right\}=\sum_{i=0}^{N-1}\mathcal{Z}\{\delta(k-i)\}=\sum_{i=0}^{N-1}z^{-i}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}\left(1-z^{-N}\right)=$$

$$=\frac{z}{z-1}\frac{z^N-1}{z^N}=\frac{1}{z-1}\frac{(z-1)\sum_{i=0}^{N-1}z^{N-i-1}}{z^{N-1}}=\frac{\sum_{i=0}^{N-1}z^{N-i-1}}{z^{N-1}}=\frac{z^{N-1}+z^{N-2}+\dots z^1+1}{z^{N-1}}$$

d) Systém má N-1 násobný pól v nule tj. pól leží uvnitř jednotkového kruhu, a proto je systém stabilní.