2014 B/K SAS, 2.termín 30.1.2015	Jméno:	ID=

1. Pro spektrum spojitého signálu platí $F(\omega)=(\pi/a)e^{-a|\omega|},\ \omega\in(-\infty,+\infty), a>0$. **(15b)**

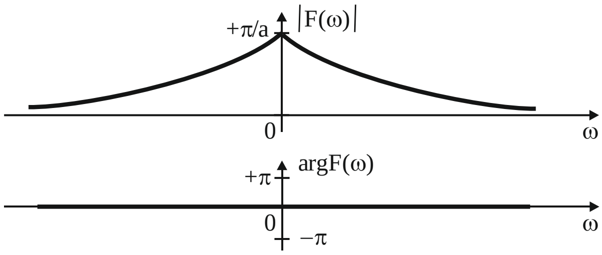
a) Načrtněte průběh amplitudového a fázového spektra. Popište a ocejchujte osy. Rozhodněte, zda je signál periodický. V případě, že ano, určete jeho základní periodu P a základní kmitočet ω_0. **5b**

b) Vypočtěte časový průběh signálu. **5b**

c) Načrtněte časový průběh signálu. Popište a ocejchujte osy. **5b**

Řešení:

a) Amplitudové a fázové spektrum:



Signál není periodický.

b) Časový průběh signálu:

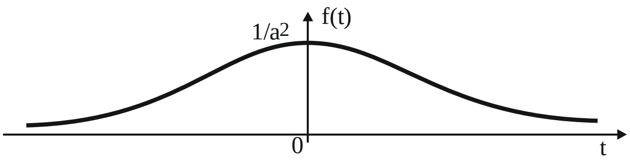
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2a}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{+a\omega}e^{j\omega t}d\omega+\int_{0}^{\infty}e^{-a\omega}e^{j\omega t}d\omega\right\}=\frac{1}{2a}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{(a+jt)\omega}d\omega+\int_{0}^{\infty}e^{-(a-jt)\omega}d\omega\right\}=$$

$$=\frac{1}{2a}\left\{\left[\frac{e^{(a+jt)\omega}}{a+jt}\right]_{-\infty}^{0}+\left[\frac{e^{-(a-jt)\omega}}{-(a-jt)}\right]_{0}^{\infty}\right\}=\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{a+jt}+\frac{1}{a-jt}\right\}=\frac{1}{2a}\frac{a-jt+a+jt}{a^2+t^2}=\frac{1}{a^2+t^2}$$

c) Časový průběh signálu:

$$f(t)=\frac{1}{a^2+t^2},\quad f(0)=\frac{1}{a^2},\quad f(\pm\infty)=0.$$

Extrém: $\frac{d}{dt}f(t)=\frac{d}{dt}\frac{1}{a^2+t^2}=\frac{-2t}{\left(a^2+t^2\right)^2}\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad t=0$



2014 B/K SAS, 2.termín 30.1.2015	Jméno:	ID=

2. Na vstupu systému působí signál $u(t)$ a na jeho výstupu je signál $y(t)$ kde

$$u(t)=\begin{cases} \cos\omega_0 t & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \qquad y(t)=\begin{cases} 10\sin\omega_0(t-2) & t\ge 2 \\ 0 & t<2 \end{cases}$$ (**20 b**)

a) Určete operátorový přenos systému. (5**b**)

b) Načrtněte asymptotickou amplitudovou (**1b**) a fázovou **(4b**) frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Popište a ocejchujte osy.

c) Vypočtěte a načrtněte impulsní charakteristiku. Popište a ocejchujte osy. (**5 b**)

d) Vypočtěte a načrtněte přechodovou charakteristiku. Popište a ocejchujte osy. (**5 b**)

Řešení.

a) Využijeme linearitu Laplaceovy transformace a větu o posunutí v čase:

$$\mathcal{L}\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}_{a=j\omega_0}=\left.\frac{1}{p-a}\right|_{a=j\omega_0}=\frac{1}{p-j\omega_0} \qquad \mathcal{L}\left\{e^{-j\omega_0 t}\right\}=\frac{1}{p+j\omega_0}$$

$$\mathcal{L}\left\{\sin\omega_0 t\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right\}=\frac{1}{2j}\left[\mathcal{L}\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}-\mathcal{L}\left\{e^{-j\omega_0 t}\right\}\right]=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{p-j\omega_0}-\frac{1}{p+j\omega_0}\right]=$$

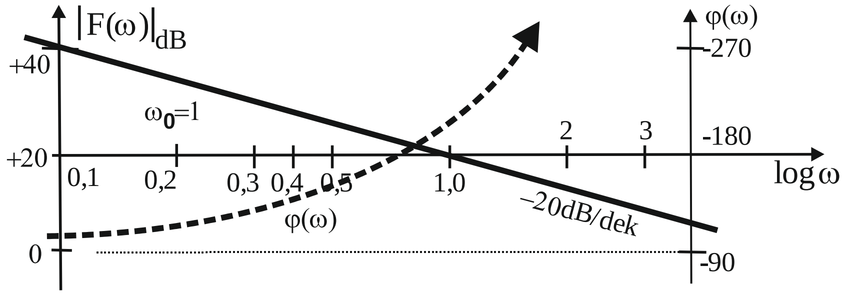
$$=\frac{1}{2j}\frac{p+j\omega_0-p+j\omega_0}{p^2+\omega_0^2}=\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}\left\{\sin\omega_0(t-2)\right\}=e^{-2p}\mathcal{L}\left\{\sin\omega_0 t\right\}=\frac{\omega_0 e^{-2p}}{p^2+\omega_0^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\cos\omega_0 t\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}+\mathcal{L}\left\{e^{-j\omega_0 t}\right\}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-j\omega_0}+\frac{1}{p+j\omega_0}\right]=\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$$

$$F(p)=\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}/\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}=\frac{10\omega_0 e^{-2p}}{p^2+\omega_0^2}\Big/\frac{p}{p^2+\omega_0^2}=\frac{10\omega_0 e^{-2p}}{p}$$

b)

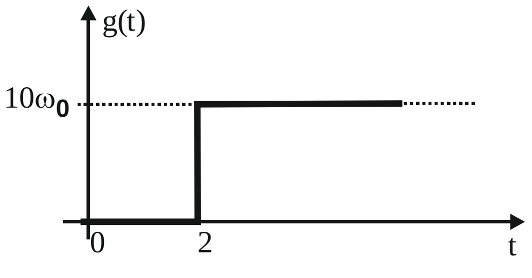
$$F(j\omega)=\frac{10\omega_0 e^{-j2\omega}}{j\omega}=\frac{10\omega_0}{\omega}e^{-j(\pi/2+2\omega)} \qquad \left|F(j\omega)\right|_{dB}=20\log(10\omega_0)-20\log\omega \qquad \varphi(\omega)=-\pi/2-2\omega$$

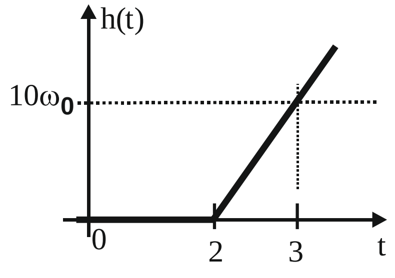


c,d)

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10\omega_0}{p}\right\}=10\omega_0\sigma(t) \qquad \Rightarrow \quad g(t)=10\omega_0\sigma(t-2)$$

$$h(t)=\int_0^t g(\tau)\,d\tau=\int_2^t 10\omega_0\,d\tau=10\omega_0\left[\tau\right]_2^t=10\omega_0(t-2)$$





2014 B/K SAS, 2.termín 30.1.2015	Jméno:	ID=

3. Je dán diskrétní signál $f(k)=\left[\sigma(k)-\sigma(k-N)\right] \quad N>0$. (**15b**)

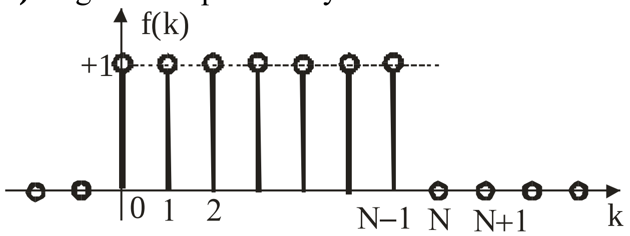
a) Rozhodněte, zda je signál periodický (**1b)** a načrtněte ho **(4b)**

b) Vypočtěte jeho spektrum (Pomůcka: $\sum_{k=0}^{N-1} q^k = \dfrac{1-q^N}{1-q}$) (**5b**)

c) Načrtněte amplitudové spektrum (**5b**)

Řešení:

a) Signál není periodický.



b) Pro spektrum signálu platí

$$F(m)=\sum_{k=0}^{N-1} f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{k=0}^{N-1}1e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{-jm\frac{2\pi}{N}}\right)^k=\frac{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}=\frac{1-e^{-jm2\pi}}{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}$$

Hodnota spektra pro $m=0$ je neurčitý výraz typu 0/0 a proto:

$$F(0)=\lim_{m\to 0}F(m)=\lim_{m\to 0}\frac{1-e^{-jm2\pi}}{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}=\lim_{m\to 0}\frac{j2\pi e^{-jm2\pi}}{j\frac{2\pi}{N}e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}=N\lim_{m\to 0}\frac{e^{-jm2\pi}}{e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}=N$$

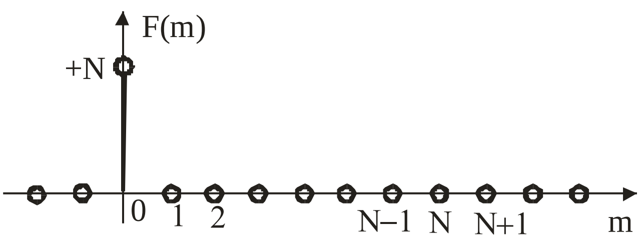
Tuto hodnotu lze získat také přímým dosazením $m=0$ do definičního vztahu:

$$F(0)=\sum_{k=0}^{N-1} f(k)e^{-j0\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{k=0}^{N-1}1=N.$$

Pro ostatní $m=1,2,\ldots N-1$ jsou hodnoty spektra nulové neboť čitatel $F(m)$ je roven $1-e^{-jm2\pi}=1-1=0$ a jmenovatel je od nuly různý. Pro spektrum tedy platí:

$$F(m)=\begin{cases} N & m=0 \\ 0 & m=1,2,\ldots N-1 \end{cases}$$

c) Amplitudové spektrum



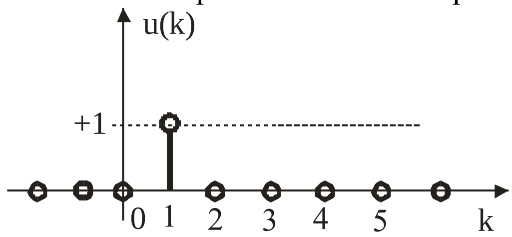
2014 B/K SAS, 2.termín 30.1.2015	Jméno:	ID=

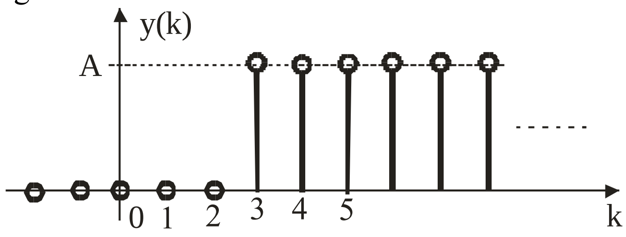
4. Diskrétní systém má na vstupu posloupnost $u(k)=\delta(k-1)$ a na výstupu posloupnost $y(k)=A\sigma(k-3)$ kde $A>1$. (**20b**)

a) Načrtněte průběh obou posloupností. (**5b**)
b) Sestavte diferenční rovnici systému (**5b**)
c) Vypočtěte (**5b**) a načrtněte (**5b**) přechodovou charakteristiku systému

Řešení:

a. Amplitudové a fázové spektrum signálu





b. Pro Z obraz vstupního a výstupního signálu platí:

$$U(z)=Z\left\{\delta(k-1)\right\}=z^{-1} \quad Y(z)=Z\left\{A\sigma(k-3)\right\}=Az^{-3}\frac{z}{z-1}=A\frac{z^{-3}}{1-z^{-1}}$$

Pro operátorový přenos a diferenční rovnici platí

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{A\dfrac{z^{-3}}{1-z^{-1}}}{z^{-1}}=\frac{Az^{-2}}{1-z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad y(k)-y(k-1)=Au(k-2)$$

c. Pro přechodovou charakteristiku platí

$$Z\left\{h(k)\right\}=F(z)\frac{z}{z-1}=\frac{Az^{-2}}{1-z^{-1}}\frac{z}{z-1}=\frac{Az^{-1}}{z-1}\frac{z}{z-1}=\frac{Az^{-1}}{z-1}\frac{z}{z-1}=Az^{-1}\frac{z}{(z-1)^2}$$

Protože $Z\left\{k\right\}=\dfrac{z}{(z-1)^2} \quad \Rightarrow \quad h(k)=\begin{cases} A(k-1) & k=1,2,3,\ldots \\ 0 & k<1 \end{cases}$