BSAS 2014/15, Termín 1, skupina A

1. Je dán spojitý signál $f(t) = -t\sigma(t + a/2)\sigma(-t + a/2),\ t \in (-\infty, +\infty), a > 0$. **(15b)**

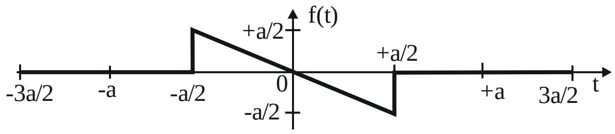
a) Načrtněte jeho průběh pro $t \in (-3a/2, +3a/2)$. Rozhodněte, zda je periodický. V případě, že ano, určete jeho základní periodu P a základní kmitočet ω_0 . **5b**

b) Vypočtěte stejnosměrnou složku signálu a výsledek zdůvodněte. **5b**

c) Vypočtěte energii signálu. **5b**

Řešení:

a)



Signál není periodický.

b) Stejnosměrná složka:

$$F(\omega = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-a/2}^{+a/2} t\,dt = \left[t^2/2\right]_{-a/2}^{+a/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) = 0$$

Stejnosměrná složka je nulová, protože plochy signálu pod osou i nad osou jsou stejné.

c) Energie signálu:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt = \int_{-a/2}^{+a/2} t^2\,dt = \left[t^3/3\right]_{-a/2}^{+a/2} = \frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{8}\right) = \frac{a^3}{12}.$$

BSAS 2014/15, Termín 1, skupina A

1. Spojitý systém má přechodovou charakteristiku $h(t)=\begin{cases} 2+2e^{-t/2}-4e^{-t/4} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ (**20b**)

a) Načrtněte tuto charakteristiku. Popište a ocejchujte osy. (**3b**)

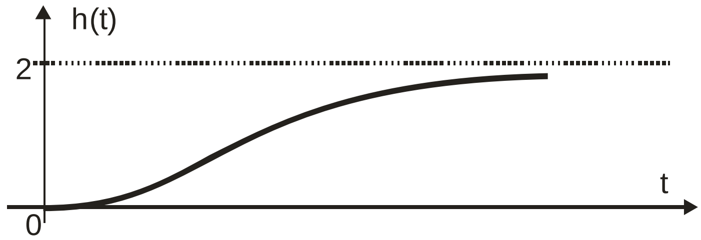
b) Vypočtěte impulsovou charakteristiku $g(t)$ (**5b**) a načrtněte ji. Popište a ocejchujte osy (**3b**)

c) Vypočtěte operátorový přenos systému (**5b**)

d) Na vstupu systému působí signál $u(t)=2\sigma(t)$. Určete ustálenou hodnotu výstupu systému. (**4b**)

Řešení:

a) Přechodová charakteristika $h(0)=0, h'(0)=0, h(\infty)=2, h'(\infty)=0$

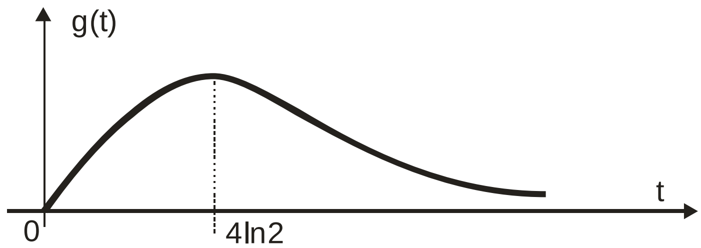


b) Pro impulsovou charakteristiku platí

$$g(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(2+2e^{-t/2}-4e^{-t/4}\right)=2\left(-\frac{1}{2}e^{-t/2}\right)-4\left(-\frac{1}{4}e^{-t/4}\right)=e^{-t/4}-e^{-t/2}$$

Extrém: $g'(t)=-\frac{1}{4}e^{-t/4}+\frac{1}{2}e^{-t/2}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}e^{-t/2}=\frac{1}{4}e^{-t/4} \Rightarrow 2=e^{+t/2}e^{-t/4}=e^{+t/4} \Rightarrow t=4\ln 2$

$g(0)=0, g'(0)=0,5-0,25=0,25, g(\infty)=0, g'(\infty)=0$



c) Platí

$$F(p)=\mathcal{L}\{g(t)\}=\mathcal{L}\left\{e^{-t/4}-e^{-t/2}\right\}=\frac{1}{p+1/4}-\frac{1}{p+1/2}=\frac{4}{4p+1}-\frac{2}{2p+1}=\frac{8p+4-8p-2}{(4p+1)(2p+1)}=$$

$$=\frac{2}{(4p+1)(2p+1)}$$

d) Na vstupu působí jednotkový skok o velikosti 2. Odezva systému na takový signál je rovna $2h(t)$ a proto pro ustálenou hodnotu platí $\lim\limits_{t\to\infty} 2h(t)=2\lim\limits_{t\to\infty} h(t)=4$.

Nebo pomocí limitní věty:

$$Y(p)=\mathcal{L}\{2\sigma(t)\}F(p)=\frac{2}{p}\frac{2}{(4p+1)(2p+1)}$$

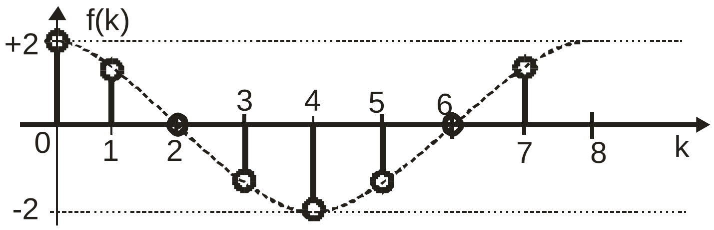
$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{p\to 0} pY(p)=\lim_{p\to 0} p\frac{4}{p(4p+1)(2p+1)}=\lim_{p\to 0}\frac{4}{(4p+1)(2p+1)}=4$$

2. Je dán diskrétní periodický signál $f\left(k\right)=2\sin\left(\frac{2\pi}{N}k+\frac{\pi}{2}\right)$ s periodou $N=8$. **(15b)**

a) Načrtněte jednu periodu signálu pro N=8. Popište a ocejchujte osy. (**5b**)
b) Určete spektrum tohoto signálu (**5b**)
c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum. Popište a ocejchujte osy. (**5b**)
Pomůcka: $\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

Řešení:

a) Platí $f\left(k\right)=2\sin\left(\frac{2\pi}{8}k+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{2\pi}{8}k\cos\frac{\pi}{2}+2\cos\frac{2\pi}{8}k\sin\frac{\pi}{2}=2\cos\frac{2\pi}{8}k$

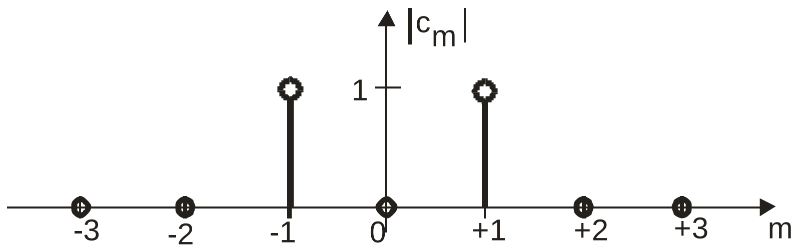


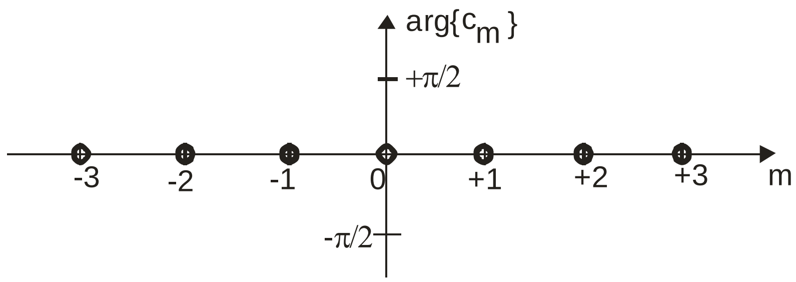
b) Platí $f\left(k\right)=2\cos\frac{2\pi}{8}k=2\frac{e^{j\frac{2\pi}{8}k}+e^{-j\frac{2\pi}{8}k}}{2}=e^{j\frac{2\pi}{8}k}+e^{-j\frac{2\pi}{8}k}=e^{-j\frac{2\pi}{8}k}+e^{+j\frac{2\pi}{8}k}$. Vzhledem k tomu, že spektrum je také periodické s periodou N lze v inverzní formuli DFŘ sčítat od libovolného indexu počínaje tj.

$$f\left(k\right)=\sum_{m=0}^{8-1}c_m e^{jm\frac{2\pi}{8}k}=\sum_{m=-1}^{8-2}c_m e^{jm\frac{2\pi}{8}k}=c_{-1}e^{j(-1)\frac{2\pi}{8}k}+c_0 e^{j(0)\frac{2\pi}{8}k}+c_{+1}e^{j(+1)\frac{2\pi}{8}k}+..+c_{+5}e^{j(+5)\frac{2\pi}{8}k}+c_{+6}e^{j(+6)\frac{2\pi}{8}k}$$

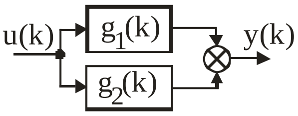
Je zřejmé, že $c_{-1}=1, c_{+1}=1$ a ostatní koeficienty spektra jsou nulové.

c) Platí: $\left|c_{-1}\right|=\left|1\right|=1, \arg\left\{c_{-1}\right\}=0, \quad \left|c_{+1}\right|=\left|1\right|=1, \arg\left\{c_{+1}\right\}=0$





3. Je dán diskrétní systém podle obrázku a pro impulsní charakteristiky platí



$$g_1(k)=\begin{cases}0,5^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}\quad g_2(k)=\begin{cases}0,8^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$ **(20b)**

a) Vypočtěte operátorový přenos celého systému (**4b**)
b) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. (**4b**)
c) Vypočtěte impulsní charakteristiku celého systému (**4b**)
d) Určete diferenční rovnici celého systému (**4b**)
e) Rozhodněte o stabilitě celého systému, zdůvodněte. (**4b**)

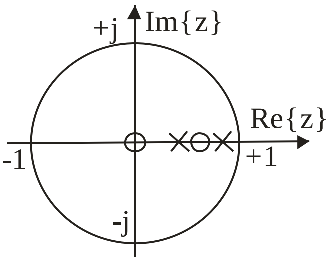
Řešení:
a) Platí

$$F_1(z)=\mathcal{Z}\{g_1(k)\}=\frac{z}{z-0,5},\quad F_2(z)=\mathcal{Z}\{g_2(k)\}=\frac{z}{z-0,8},$$

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=F_1(z)+F_2(z)=\frac{z}{z-0,5}+\frac{z}{z-0,8}=\frac{2z^2-1,3z}{(z-0,5)(z-0,8)}$$

b) Platí

$F(z)=\dfrac{2z^2-1,3z}{(z-0,5)(z-0,8)}=\dfrac{2z(z-0,65)}{(z-0,5)(z-0,8)}$. Systém má dva póly $z_1=0,5;\ z_2=0,8$ a dvě nuly $n_1=0,\ n_2=0,65$.



c) Pro impulsní charakteristiku platí

$$g(k)=g_1(k)+g_2(k)=\begin{cases}0,5^k+0,8^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

d) Platí

$$F(z)=\frac{2z^2-1,3z}{(z-0,5)(z-0,8)}=\frac{2z^2-1,3z}{z^2-1,3z+0,4}=\frac{2-1,3z^{-1}}{1-1,3z^{-1}+0,4z^{-2}}=\frac{Y(z)}{U(z)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad Y(z)\left(1-1,3z^{-1}+0,4z^{-2}\right)=U(z)\left(2-1,3z^{-1}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y(k)-1,3y(k-1)+0,4y(k-2)=2u(k)-1,3u(k-1)$$

e) Oba póly systému leží uvnitř jednotkové kružnice, a proto je systém stabilní.