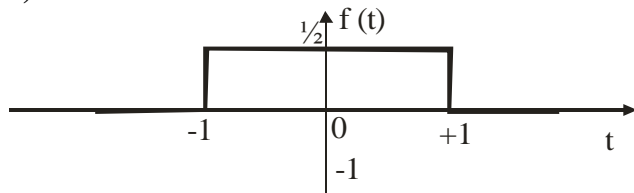


1. Je dán signál se spojitým časem $f(t) = [\sigma(t+1) - \sigma(t-1)]/2$. (15 b)

- a) Načrtněte průběh signálu (3b). Popište osy (1b)
 b) Určete, zda je signál periodický (1b).
 c) Vypočtěte jeho frekvenční spektrum (5b).
 d) Načrtněte amplitudové (2b) a fázové (2b) spektrum. Popište osy (1b)

Řešení:

a)

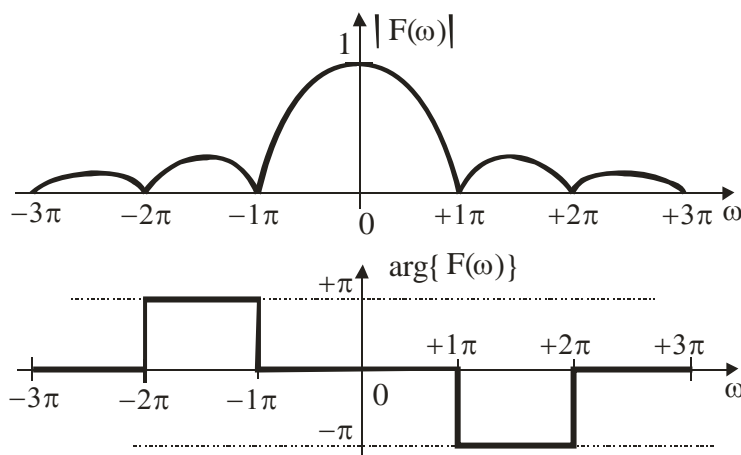


b) Signál není periodický.

c) Spektrum určíme jako jeho Fourierovu transformaci. Platí

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{2} \frac{e^{-j\omega} - e^{+j\omega}}{-j\omega} = \frac{e^{+j\omega} - e^{-j\omega}}{2j\omega} = \frac{\sin \omega}{\omega}$$

d) Pro amplitudové a fázové spektrum platí:



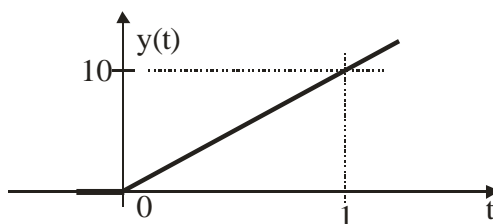
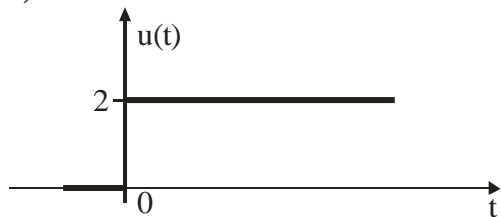
2. Na vstupu spojitého systému působí signál $u(t) = 2\sigma(t)$ a na výstupu systému je signál

$$y(t) = \begin{cases} 10t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (20b)$$

- a) Načrtněte vstupní a výstupní signál (3b). Popište osy (1b).
 b) Určete operátorový přenos systému (2b).
 c) Načrtněte rozložení pólů a nul (3b). Popište osy. (1b) a rozhodněte o stabilitě (1b).
 d) Vypočtěte (3b) a načrtněte (3b) impulsovou charakteristiku. Popište osy (1b).
 e) Určete diferenciální rovnici systému (2b). Označte výstup systému $y(t)$ a vstup systému $u(t)$.

Řešení

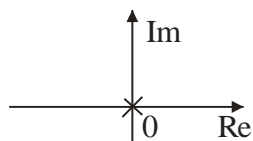
a)



b) Pro operátorový přenos platí

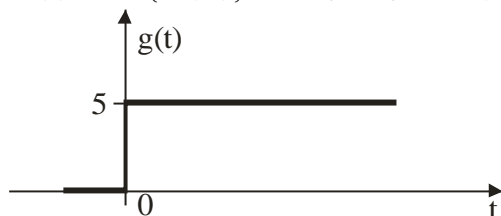
$$F(p) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{\mathcal{L}\{10t\}}{\mathcal{L}\{2\sigma(t)\}} = \frac{10/p^2}{2/p} = \frac{5}{p}$$

c) Systém má jeden pól $p_1 = 0$ a žádnou nulu. Pól leží na imaginární ose- systém je na mezi stability.



d) Pro impulsovou charakteristiku platí

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{5/p\} = 5\sigma(t)$$



e)

$$F(p) = \frac{5}{p} = \frac{Y(p)}{U(p)} \Rightarrow pY(p) = 5U(p) \Rightarrow y'(t) = 5u(t)$$

3. Periodický diskretní signál s periodou $N = 4$ má následující hodnoty spektra: **(15b)**

$$c_0 = 1/2; \quad c_1 = 1/4 - j/4; \quad c_2 = 0; \quad c_3 = 1/4 + j/4$$

a) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum **(4b)**. Ocejchujte osy **(1b)**.

b) Vypočtěte hodnoty signálu $f(k)$ pro $k = 0, 1, 2, 3$ **(5b)**

c) Načrtněte signál $f(k)$ pro $k = 0, 1, 2, 3$ **(4b)**. Ocejchujte osy **(1b)**.

Řešení

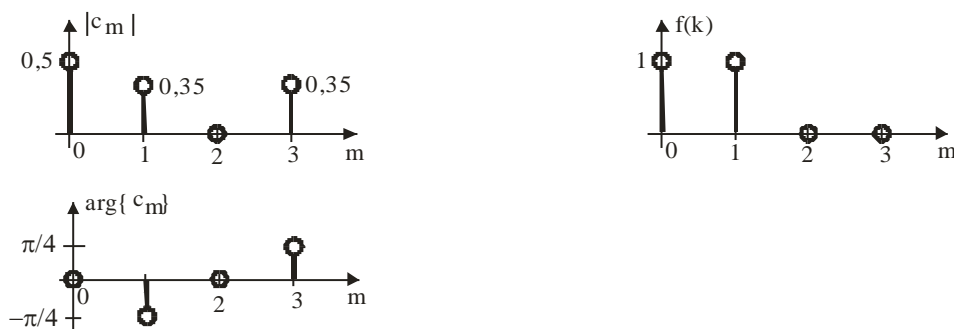
a) Pro absolutní hodnoty a argumenty platí:

$$|c_0| = 1/2 \quad \arg c_0 = 0$$

$$|c_1| = \sqrt{2}/4 \quad \arg c_1 = -\pi/4$$

$$|c_2| = 0 \quad \arg c_2 = 0$$

$$|c_3| = \sqrt{2}/4 \quad \arg c_3 = +\pi/4$$



b) Platí:

$$\begin{aligned} f(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{jm\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{m=0}^3 c_m e^{jm\frac{2\pi}{4}k} = \sum_{m=0}^3 c_m e^{jm\frac{\pi}{2}k} = c_0 e^{j0\frac{\pi}{2}k} + c_1 e^{j1\frac{\pi}{2}k} + c_2 e^{j2\frac{\pi}{2}k} + c_3 e^{j3\frac{\pi}{2}k} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1-j}{4} e^{j\frac{\pi}{2}k} + 0 e^{j2\frac{\pi}{2}k} + \frac{1+j}{4} e^{j3\frac{\pi}{2}k} = \frac{1}{2} + \frac{1-j}{4} \left(e^{j\frac{\pi}{2}} \right)^k + \frac{1+j}{4} \left(e^{j\frac{3\pi}{2}} \right)^k = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (1-j) j^k + \frac{1}{4} (1+j) (-j)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [(1-j) j^k + (1+j) (-j)^k] \end{aligned}$$

Pro jednotlivé hodnoty signálu bude platit:

$$f(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [(1-j) j^0 + (1+j) (-j)^0] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [(1-j) + (1+j)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [2] = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [(1-j) j^1 + (1+j) (-j)^1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [(j+1) - (j-1)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [2] = 1$$

$$f(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [(1-j) j^2 + (1+j) (-j)^2] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [-(1-j) - (1+j)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [-1 + j - 1 - j] = 0$$

$$f(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [(1-j) j^3 + (1+j) (-j)^3] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [(1-j) (-j) + (1+j) (j)] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [-j - 1 + j - 1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [-2] = 0$$

4. Lineární diskretní systém se vstupem $u(k)$ a výstupem $y(k)$ je popsán diferenční rovnicí

$$y(k) + 0,5y(k-1) = 2u(k). \quad (20b)$$

a. Určete Z přenos systému. (2b)

b. Načrtněte rozložení pólů a nul (2b). Popište osy (1b). Určete stabilitu systému. (1b)

c. Určete impulsovou charakteristiku (3b) a načrtněte ji pro $k = 0, 1, 2, 3$. (4b)

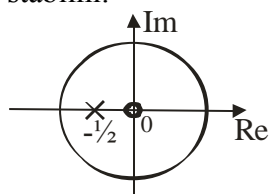
d. Určete přechodovou charakteristiku (3b) a načrtněte ji pro $k = 0, 1, 2, 3$. (4b)

Řešení

a. $Y(z) + 0,5z^{-1}Y(z) = 2U(z)$

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2}{1 + 0,5z^{-1}} = \frac{2z}{z + 0,5}$$

b. Systém má jednu nulu a jeden pól $z_1 = -0,5$. Pól leží uvnitř jednotkové kružnice a proto je systém stabilní.



c. **Způsob 1-** výpočet z operátorového přenosu

$$G(z) = F(z) = \frac{2}{1 + 0,5z^{-1}} = \frac{2}{1 - (-0,5)z^{-1}} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-0,5)^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2(-0,5)^k z^{-k}$$

a pro impulsovou charakteristiku tedy platí

$$g(k) = \begin{cases} 2(-1/2)^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$k = 0 \quad g(0) = 2(-1/2)^0 = 2$$

$$k = 1 \quad g(1) = 2(-1/2)^1 = -1$$

$$k = 2 \quad g(2) = 2(-1/2)^2 = 2/4 = 1/2 = 0,5$$

$$k = 3 \quad g(3) = 2(-1/2)^3 = -2/8 = -1/4 = -0,25$$

Způsob 2- dělení polynomů

z^1	z^0	z^1	z^0	z^0	z^{-1}	z^{-2}	z^{-3}
2	0	1	0,5	2,000	-1,000	0,500	-0,250

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \\ \underline{0 \quad -1} \\ \quad -1 \quad -0,5 \\ \underline{\quad 0 \quad 0,5} \\ \quad \quad 0,5 \quad 0,25 \end{array}$$

Způsob 3- postupným řešením diferenční rovnice

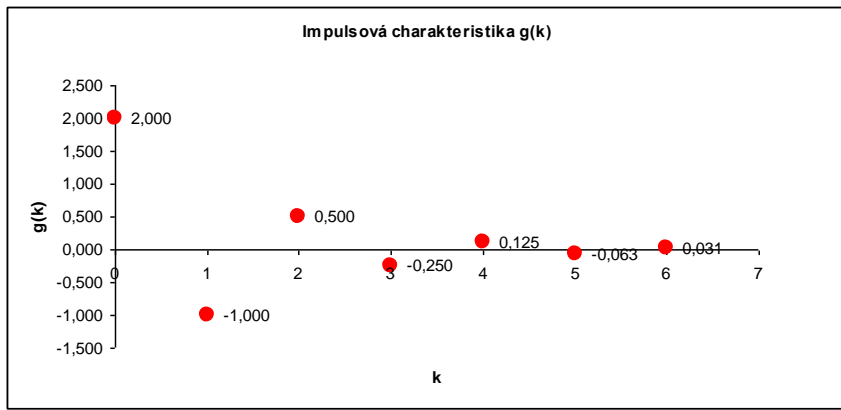
$$y(k) = -0,5y(k-1) + 2u(k) \quad u(k) = \delta(k)$$

$$k = 0 \quad y(0) = -0,5y(-1) + 2u(0) = 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$k = 1 \quad y(1) = -0,5y(0) + 2u(1) = -0,5 \cdot 2 + 0 = -1$$

$$k = 2 \quad y(2) = -0,5y(1) + 2u(2) = -0,5 \cdot (-1) + 0 = 0,5$$

$$k = 3 \quad y(3) = -0,5y(2) + 2u(3) = -0,5 \cdot (0,5) + 0 = -0,25$$



d. Způsob 1- analytický výpočet z impulsové charakteristiky

$$h(k) = \sum_{i=0}^k g(i) = \sum_{i=0}^k 2(-1/2)^i = 2 \sum_{i=0}^k (-1/2)^i = 2 \frac{1 - (-1/2)^{k+1}}{1 - (-1/2)} = 4 \frac{1 - (-1/2)^{k+1}}{3} = \frac{4}{3} [1 - (-1/2)^{k+1}]$$

$$k=0 \quad h(0) = \frac{4}{3} [1 - (-1/2)^1] = \frac{4}{3} * \frac{3}{2} = 2$$

$$k=1 \quad h(1) = \frac{4}{3} [1 - (-1/2)^2] = \frac{4}{3} [1 - \frac{1}{4}] = \frac{4}{3} * \frac{3}{4} = 1$$

$$k=2 \quad h(2) = \frac{4}{3} [1 - (-1/2)^3] = \frac{4}{3} [1 + \frac{1}{8}] = \frac{4}{3} * \frac{9}{8} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$k=3 \quad h(3) = \frac{4}{3} [1 - (-1/2)^4] = \frac{4}{3} [1 - \frac{1}{16}] = \frac{4}{3} * \frac{15}{16} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Způsob 2- postupnou sumací impulsové charakteristiky

$$h(k) = \sum_{i=0}^k g(i) = \sum_{i=0}^{k-1} g(i) + g(k)$$

$$k=0 \quad h(0) = g(0) = 2$$

$$k=1 \quad h(1) = h(0) + g(1) = 2 - 1 = 1$$

$$k=2 \quad h(2) = h(1) + g(2) = 1 + 0,5 = 1,5$$

$$k=3 \quad h(3) = h(2) + g(3) = 1,5 - 0,25 = 1,25$$

Způsob 3- postupným řešením diferenční rovnice

$$y(k) = -0,5y(k-1) + 2u(k) \quad u(k) = \sigma(k)$$

$$k=0 \quad y(0) = -0,5y(-1) + 2u(0) = 0 + 2*1 = 2$$

$$k=1 \quad y(1) = -0,5y(0) + 2u(1) = -0,5*(2) + 2*1 = 1$$

$$k=2 \quad y(2) = -0,5y(1) + 2u(2) = -0,5*(1) + 2*1 = 1,5$$

$$k=3 \quad y(3) = -0,5y(2) + 2u(3) = -0,5*(1,5) + 2*1 = 1,25$$

