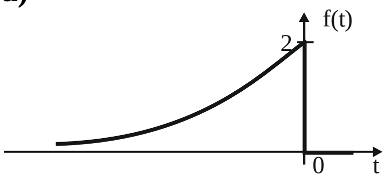
ISPP, Termín 2, 2013/14, 70b	Jméno	ID

1. Je dán signál se spojitým časem $f(t) = 2\sigma(-t)e^{2t}$. (**15 b**)

a) Načrtněte průběh signálu (**3b**). Popište osy (**1b**)
b) Určete, zda je signál periodický (**1b**) .
c) Vypočtěte jeho frekvenční spektrum (**5b**).
d) Načrtněte amplitudové (**2b**) a fázové **(2b)** spektrum. Popište osy (**1b**)

Řešení:
a)



b) Signál není periodický.
c) Spektrum určíme jako jeho Fourierovu transformaci. Platí

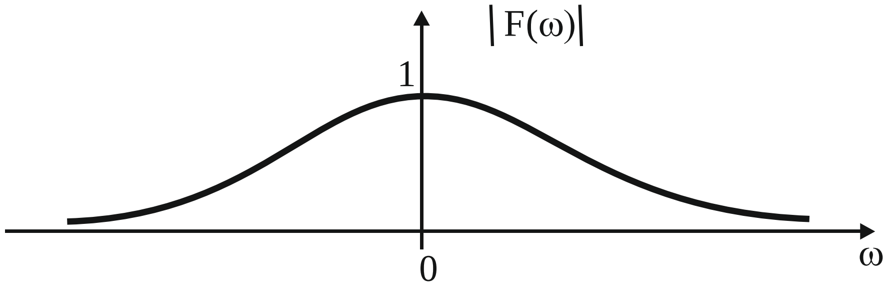
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = 2\int_{-\infty}^{0} e^{2t}e^{-j\omega t}dt = 2\int_{-\infty}^{0} e^{(2-j\omega)t}dt = 2\left[\frac{e^{(2-j\omega)t}}{(2-j\omega)}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{2}{(2-j\omega)}(1-0) =$$

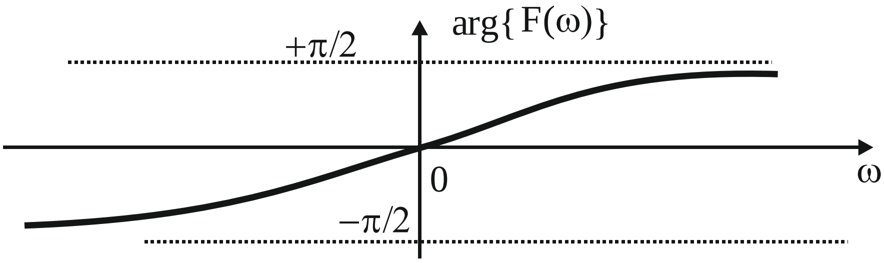
$$= \frac{2}{2-j\omega} = 2\frac{2+j\omega}{4+\omega^2}$$

d) Pro amplitudové a fázové spektrum platí:

$$|F(\omega)| = \left|\frac{2}{2-j\omega}\right| = \frac{2}{\sqrt{4+\omega^2}} \qquad |F(0)| = 1 \quad |F(\pm\infty)| = 0 \quad \frac{d|F(\omega)|}{d\omega} = \frac{-(4+\omega^2)^{-1/2}2\omega}{(4+\omega^2)} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \omega = 0$$

$$\Phi(\omega) = \arctan\frac{\frac{\omega}{4+\omega^2}}{\frac{2}{4+\omega^2}} = \arctan\frac{\omega}{2}$$



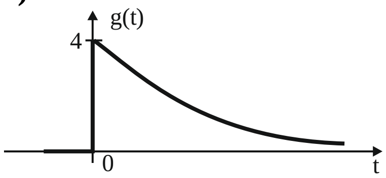


..

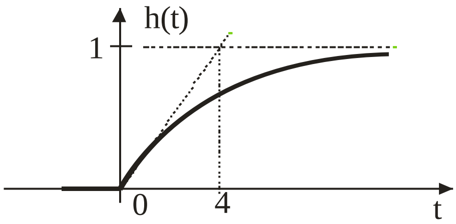
2. Impulsová charakteristika spojitého dynamického systému má tvar $g(t)=\begin{cases}4e^{-4t} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ **20 b**

a) Načrtněte tuto charakteristiku (**3b**). Popište osy (**1b**).
b) Vypočtěte (**3b**) a načrtněte (**3b**) přechodovou charakteristiku. Popište osy (**1b**).
c) Určete operátorový přenos systému (**2b**).
d) Načrtněte rozložení pólů a nul (**3b**). Popište osy. (**1b**) a rozhodněte o stabilitě (**1b**)
e) Určete diferenciální rovnici systému (**2b**). Označte výstup systému $y(t)$ a vstup systému $u(t)$.

Řešení
a)



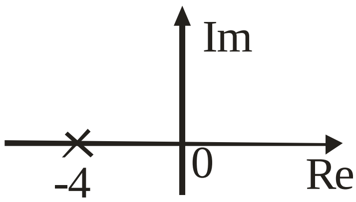
b) $h(t)=\int_0^t g(\tau)\,d\tau=4\int_0^t e^{-4\tau}d\tau=4\left[\frac{e^{-4\tau}}{-4}\right]_0^t=1-e^{-4t},\quad t\geq 0;\quad h(t)=0,\quad t<0$



c) Pro operátorový přenos platí

$$F(p)=\mathscr{L}\{g(t)\}=\mathscr{L}\{4e^{-4t}\}=\frac{4}{p+4}=\frac{1}{0{,}25p+1}$$

d) Systém má jeden pól $p_1=-4$ a žádnou nulu. Pól leží v levé polorovině- systém je stabilní.



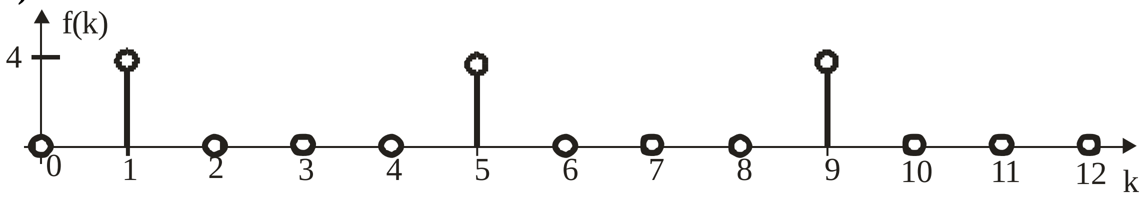
e)

$$F(p)=\frac{4}{p+4}=\frac{Y(p)}{U(p)}\quad\Rightarrow\quad Y(p)(p+4)=4U(p)\quad\Rightarrow\quad y'(t)+4y(t)=4u(t)$$

3. Pro jednu periodu diskrétního periodického signálu s periodou $N = 4$ platí:
$f(k) = 4\delta(k-1), \quad k = (-\infty, +\infty)$. (**15b**)

a) Načrtněte hodnoty signálu pro $k = 0,1,2,\ldots 12$. Ocejchujte osy. (**3b**)
b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu. (**4b**)
c) Načrtněte amplitudové (**4b**) a fázové (**4b**) spektrum tohoto signálu. Ocejchujte osy.

Řešení
a)



b) Pro výpočet koeficientů diskrétní Fourierovy řady platí

$c_m = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{-jm\frac{2\pi}{4}k} \quad m = 0,1,2,3$. Jelikož $f(1) = 4, f(0) = f(2) = f(3) = 0$ bude

$$c_m = \frac{1}{4} f(1) e^{-jm\frac{2\pi}{4}1} = \frac{1}{4} 4e^{-jm\frac{\pi}{2}} = e^{-jm\frac{\pi}{2}} = (-j)^m \quad m = 0,1,2,3$$

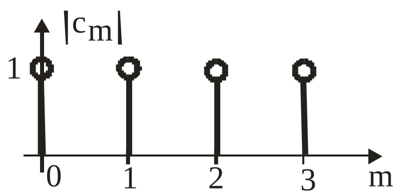
$c_0 = (-j)^0 = 1 \quad |c_0| = 1 \quad \arg c_0 = 0$

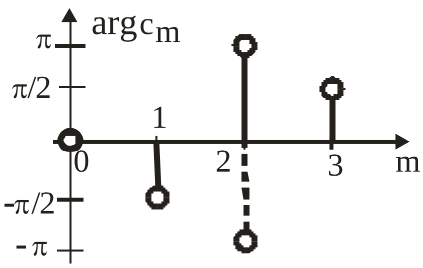
$c_1 = (-j)^1 = -j \quad |c_1| = 1 \quad \arg c_1 = -\pi/2$

$c_2 = (-j)^2 = -1 \quad |c_2| = 1 \quad \arg c_2 = \pm\pi$

$c_3 = (-j)^3 = +j \quad |c_3| = 1 \quad \arg c_3 = +\pi/2$

c)





4. Diskrétní systém je popsán operátorovým přenosem $F(z)=\dfrac{1}{z+1/2}$. **(20b)**

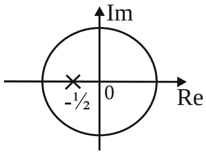
a) Určete jeho diferenční rovnici. Dále předpokládejte nulové počáteční podmínky. (**2b**)
b) Načrtněte rozložení pólů a nul (**1b**). Popište osy (**1b**)
c) Rozhodněte o jeho stabilitě. (**1b**)
d) Vypočtěte (**4b**) a načrtněte (**3b**) jeho impulsovou charakteristiku pro $k=0,1,2,3,4$.
e) Vypočtěte (**5b**) a načrtněte (**3b**) jeho přechodovou charakteristiku pro $k=0,1,2,3,4$.

Řešení
a) Platí

$$F(z)=\frac{1}{z+1/2}\frac{z^{-1}}{z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{1+1/2z^{-1}}=\frac{Y(z)}{U(z)}\quad\Rightarrow\quad Y(z)\left[1+1/2z^{-1}\right]=z^{-1}U(z)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y(k)+1/2y(k-1)=u(k-1)\quad\Rightarrow\quad y(k)=-1/2y(k-1)+u(k-1)$$

b) Systém má jeden pól $z_1=-1/2$ a žádnou nulu.



c) Pól leží uvnitř jednotkové kružnice a proto je systém stabilní.

d) Způsob 1 – výpočet z operátorového přenosu. Platí

$$g(k)=\mathcal{Z}^{-1}\left[F(z)\right]=\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z+1/2}\right]=\mathcal{Z}^{-1}\left[z^{-1}\frac{z}{z-(-1/2)}\right]=\begin{cases}(-1/2)^{k-1} & k\geq 1\\ 0 & k<1\end{cases}$$

$$g(0)=0\quad g(1)=(-1/2)^{1-1}=1\quad g(2)=(-1/2)^{2-1}=-1/2 \qquad .$$

$$g(3)=(-1/2)^{3-1}=1/4\quad g(4)=(-1/2)^{4-1}=-1/8$$

d) Způsob 2 – dělení polynomů

čitatel		jmenovatel		podíl				
z^1	z^0	z^1	z^0	z^0	z^(-1)	z(-2)	z^(-3)	z^(-4)
0	1	1	0,5	0,000	1,000	-0,500	0,250	-0,125

0	0			
0	1			
	1	0,5		
	0	-0,5		
		-0,5	-0,25	
		0	0,25	
			0,25	0,125
			0	-0,125

d) Způsob 3 – postupným řešením diferenční rovnice

$$y(k) = -1/2\,y(k-1) + u(k-1) \quad pro \quad u(k) = \delta(k)$$

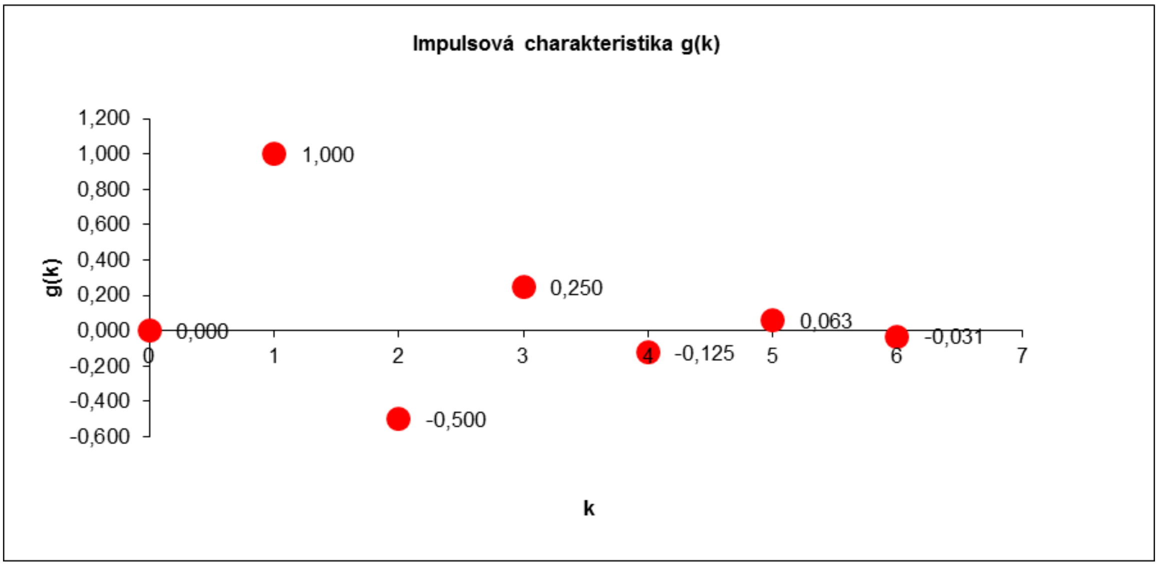
$$k=0 \quad y(0) = -1/2\,y(0-1) + u(0-1) = 0 + 0 = 0$$

$$k=1 \quad y(1) = -1/2\,y(1-1) + u(1-1) = 0 + 1 = 1$$

$$k=2 \quad y(2) = -1/2\,y(2-1) + u(2-1) = 1/2 + 0 = -1/2$$

$$k=3 \quad y(3) = -1/2\,y(3-1) + u(3-1) = (-1/2)(-1/2) + 0 = 1/4$$

$$k=4 \quad y(4) = -1/2\,y(4-1) + u(4-1) = (-1/2)(1/4) + 0 = -1/8$$



e) Platí

$$h(k) = \sum_{i=0}^{k} g(i) = \sum_{i=0}^{k-1} g(i) + g(k) = h(k-1) + g(k)$$

$$h(0) = g(0) = 0$$

$$h(1) = h(0) + g(1) = 0 + 1 = 1$$

$$h(2) = h(1) + g(2) = 1 - 1/2 = 1/2$$

$$h(3) = h(2) + g(3) = 1/2 + 1/4 = 3/4$$

$$h(4) = h(3) + g(4) = 3/4 - 1/8 = 5/8$$