ISPP, Termín 1, 7.1.2014, 70 b	Jméno	ID

1. Je dán signál $f(t) = 1 + 2\sin 2\pi t + 2\cos 4\pi t, \quad t \in (-\infty, +\infty).$

a) Pokud je signál periodický určete základní periodu signálu. (**2b**)
b) Určete jeho frekvenční spektrum. (**5b**)
c) Načrtněte amplitudové (**3b**) a fázové (**3b**) frekvenční spektrum. Ocejchujte osy.
d) Jaká je střední hodnota (stejnosměrná složka) tohoto signálu. (**1b**)
e) Které harmonické složky tento signál obsahuje. (**1b**) **Celkem 15b**

Řešení:

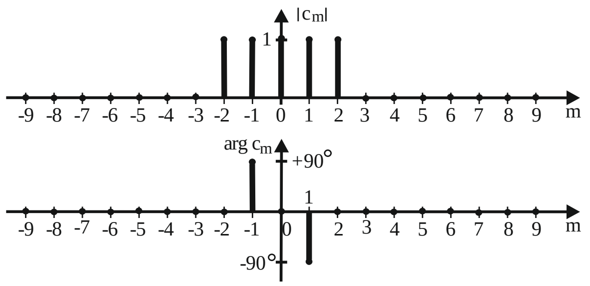
a) Signál je periodický, $\omega_0 = \frac{2\pi}{P} = 2\pi \Rightarrow P = 1[s]$

b) $f(t) = 1 + 2\frac{e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}}{2j} + 2\frac{e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}}{2} = e^{-j4\pi t} + je^{-j2\pi t} + 1 - je^{j2\pi t} + e^{j4\pi t}$

$c_0 = 1 \quad c_{-1} = +j \quad c_{+1} = -j \quad c_{-2} = c_{+2} = 1$ ostatní koeficienty jsou nulové.

c) $|c_0| = 1 \quad |c_{-1}| = |c_{+1}| = |c_{-2}| = |c_{+2}| = 1$

$\arg\{c_0\} = 0 \quad \arg\{c_{-1}\} = +90^\circ \quad \arg\{c_{+1}\} = -90^\circ \quad \arg\{c_{-2}\} = \arg\{c_{+2}\} = 0$

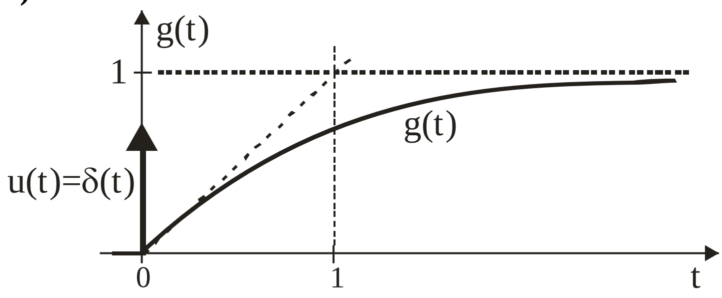


d) Hodnota stejnosměrné složky je 1.
e) Signál obsahuje první a druhou harmonickou složku.

2. Pro impulsní charakteristiku spojitého systému platí $g(t) = 1 - e^{-t} \quad pro\, t > 0$.

a) Načrtněte tuto charakteristiku. (**4b**)
b) Určete operátorový přenos systému. (**3b**)
c) Určete frekvenční přenos systému. (**3b**)
d) Načrtněte asymptotickou amplitudovou (**4b**) a fázovou (**4b**) frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Ocejchujte osy.
e) Určete diferenciální rovnici systému**. (2b)** **Celkem 20b**

Řešení:
a)



b) $F(p) = \mathscr{L}\{g(t)\} = \mathscr{L}\{1 - e^{-t}\} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{1}{p(p+1)}$

c) $F(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \dfrac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\omega\right)}$

d) Pro absolutní hodnotu frekvenčního přenosu platí:

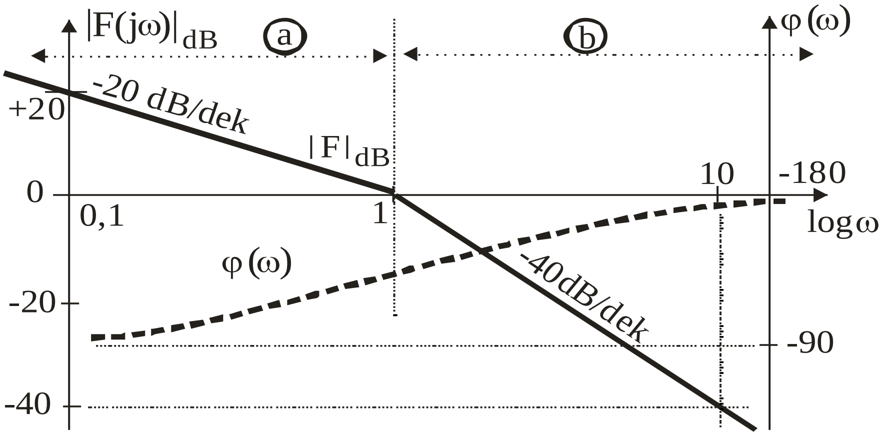
$$\left|F(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left|F(j\omega)\right| = 20\log 1 - 20\log\omega - 20\log\sqrt{\omega^2+1} = -20\log\omega - 20\log\sqrt{\omega^2+1}$$

Na charakteristice je jeden zlomový bod $\omega = 1$ a v jednotlivých oblastech platí:

Oblast a: $\omega \ll 1 \Rightarrow \left|F(j\omega)\right|_{dB} \approx -20\log\omega$

Oblast b: $\omega \gg 1 \Rightarrow \left|F(j\omega)\right|_{dB} \approx -20\log\omega - 20\log\omega = -40\log\omega$.

Pro fázi platí $\varphi(\omega) = -\pi/2 - \arctan\omega$.



e) $F(p) = \dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{Y(p)}{U(p)} \quad \Rightarrow p^2Y(p) + pY(p) = U(p) \quad / \mathscr{L}^{-1} \quad \Rightarrow y''(t) + y'(t) = u(t)$

3. Je dán diskrétní signál $f(k)=e^{j\frac{2\pi}{N}k}+e^{-j\frac{2\pi}{N}k}, k\in(-\infty,+\infty)$ kde k je pořadové číslo vzorku a N je kladné celé číslo.

a) Ukažte, že tato posloupnost je periodická s periodou N (**5b**)

b) Načrtněte jednu periodu tohoto signálu pro $N=8$ (**10b**).

Celkem (**15b**)

Řešení

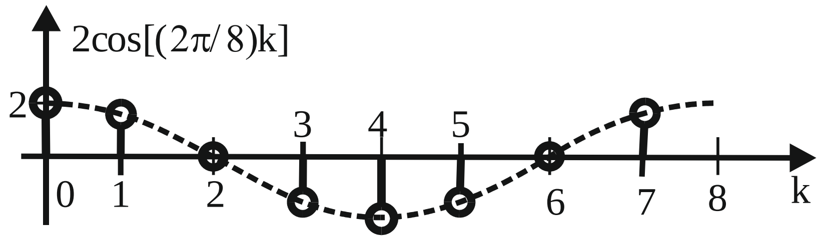
a)

$$f(k+N)=e^{j\frac{2\pi}{N}(k+N)}+e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N)}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}e^{j\frac{2\pi}{N}N}+e^{-j\frac{2\pi}{N}k}e^{-j\frac{2\pi}{N}N}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}e^{j2\pi}+e^{-j\frac{2\pi}{N}k}e^{-j2\pi}=$$

$$=e^{j\frac{2\pi}{N}k}+e^{-j\frac{2\pi}{N}k}=f(k)$$

b) Podle Eulerova vztahu platí

$$f(k)=e^{j\frac{2\pi}{N}k}+e^{-j\frac{2\pi}{N}k}=2\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}k}+e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}{2}=2\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{8}k\right)$$



4. Diskrétní systém je popsán svojí přechodovou charakteristikou $h(k) = k + 1,\ k = 0,1,2,\dots$.

a) Načrtněte přechodovou charakteristiku pro $k = 0,1,2,3,4$. Ocejchujte osy. (**4b**)

b) Určete impulsovou charakteristiku systému pro $k \in \langle 0, \infty)$ a načrtněte ji pro $k = 0,1,2,3,4$. Ocejchujte osy. (**5b**)

c) Určete operátorový přenos systému. (**5b**)

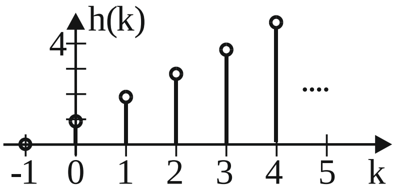
d) Napište diferenční rovnici systému. (**4b**)

e) Načrtněte rozložení pólů a nul a rozhodněte o stabilitě systému. (**2b**)

Celkem 20b

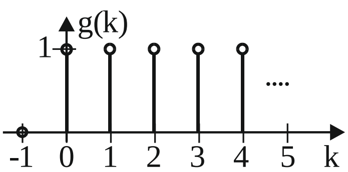
Řešení:

a) Přechodová charakteristika:



b) Pro impulsovou charakteristiku platí:

$$g(0) = h(0) = 1,\quad g(k) = h(k) - h(k-1) = k + 1 - (k + 1 - 1) = 1\ \ k = 1,2,\dots \quad \Rightarrow \quad g(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$



c)

$$F(z) = \mathcal{Z}\{g(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

d) $F(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{1}{1 - z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad Y(z)\left(1 - z^{-1}\right) = U(z) \quad \Rightarrow \quad y(k) - y(k-1) = u(k)$

e) Systém má jednu nulu a jeden pól $z_1 = 1$, který leží na jednotkové kružnici a proto je systém na mezi stability.