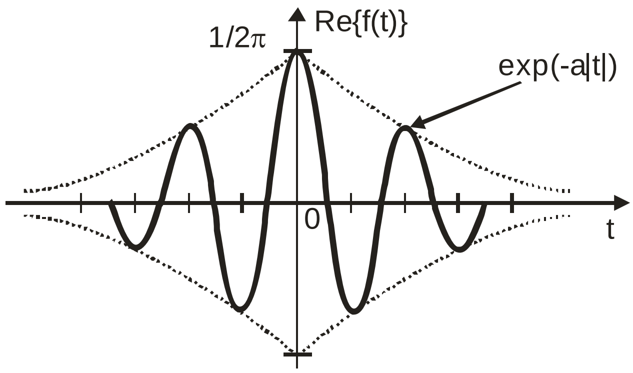
2013 Termín 3, 6. 2. 2014	Jméno	ID

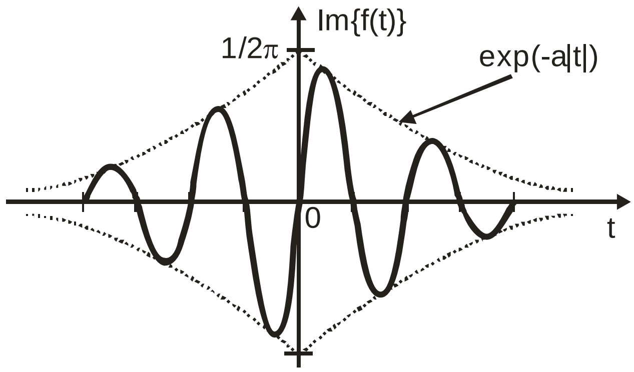
1. Je dán spojitý signál $f\left(t\right)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-a|t|}e^{j\omega_0 t} \quad t\in\left(-\infty,+\infty\right), a>0$ **(15b)**

a) Načrtněte reálnou a imaginární část signálu a rozhodněte, zda je periodický **(3b)**
b) Vypočtěte jeho spektrum (**8b**)
c) Načrtněte amplitudové spektrum (**4b**)

Řešení:

a) Platí $f\left(t\right)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-a|t|}\cos\omega_0 t+j\dfrac{1}{2\pi}e^{-a|t|}\sin\omega_0 t$. Reálná (imaginární) část signálu představuje tlumený kosinusový (sinusový) signál. Signál není periodický.





b) Pro spektrum platí

$F\left(\omega\right)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt$. Protože $e^{-a|t|}=\begin{cases} e^{-at} & t\geq 0 \\ e^{+at} & t<0 \end{cases}$ je třeba integrál rozdělit na dva integrály. Bude

$$F\left(\omega\right)=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{+at}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{+t\left(a+j\omega_0-j\omega\right)}dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-t\left(a-j\omega_0+j\omega\right)}dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{\left(a+j\omega_0-j\omega\right)}\left[e^{+t\left(a+j\omega_0-j\omega\right)}\right]_{-\infty}^{0}+\frac{-1}{\left(a-j\omega_0+j\omega\right)}\left[e^{-t\left(a-j\omega_0+j\omega\right)}\right]_{0}^{+\infty}\right\}=$$

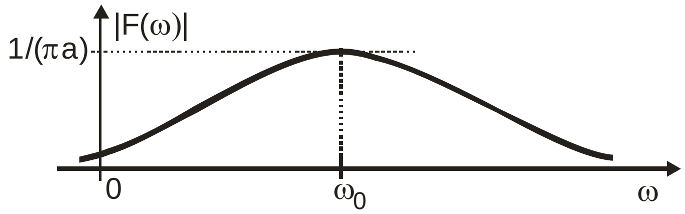
$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{\left(a+j\omega_0-j\omega\right)}+\frac{1}{\left(a-j\omega_0+j\omega\right)}\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{a-j\left(\omega-\omega_0\right)}+\frac{1}{a+j\left(\omega-\omega_0\right)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{a+j\omega-j\omega_0+a-j\omega+j\omega_0}{a^2+\left(\omega-\omega_0\right)^2}=\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+\left(\omega-\omega_0\right)^2}$$

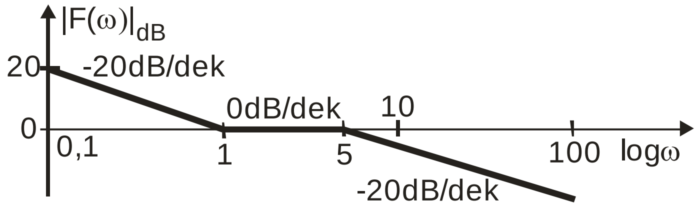
c) Spektrum je čistě reálné a kladné, proto $\left|F\left(\omega\right)\right|=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{a}{a^2+\left(\omega-\omega_0\right)^2}$, $\arg\left\{F\left(\omega\right)\right\}=0$. Dále platí

$F\left(-\infty\right)=F\left(+\infty\right)=0$ a pro extrém spektra bude $\dfrac{dF\left(\omega\right)}{d\omega}=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{-a\left[2\left(\omega-\omega_0\right)\right]}{\left[a^2+\left(\omega-\omega_0\right)^2\right]^2}\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad \omega=\omega_0$

$F\left(\omega=\omega_0\right)=\dfrac{1}{\pi a}$



2. Spojitý systém, který nemá dopravní zpoždění, má asymptotickou amplitudovou frekvenční charakteristiku uvedenou na obrázku. (20b)



a) Určete operátorový přenos systému (**5b**)
b) Napište diferenciální rovnici systému (**3b**)
c) Načrtněte rozložení pólů a nul tohoto systému. Popište osy. (**5b**)
d) Načrtněte fázovou charakteristiku tohoto systému (**7b**)

Řešení:

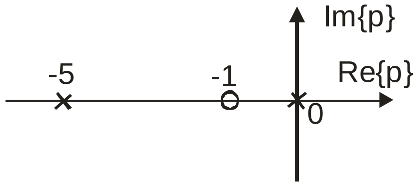
a) Operátorový přenos je typu $F(p)=\dfrac{K(T_1p+1)}{p(T_2p+1)}$ kde pro konstantu K platí

$20\log\left.\dfrac{K}{\omega}\right|_{\omega=1}=20\log K=0dB \quad\Rightarrow\quad K=1$ a dále platí

$$\frac{1}{T_1}=1\Rightarrow T_1=1,\quad \frac{1}{T_2}=5\Rightarrow T_2=0,2 \quad\Rightarrow\quad F(p)=\frac{(p+1)}{p(0,2p+1)}$$

b) $F(p)=\dfrac{Y(p)}{U(p)}=\dfrac{(p+1)}{p(0,2p+1)}\Rightarrow Y(p)\left(0,2p^2+p\right)=U(p)(p+1)\Rightarrow 0,2y''(t)+y'(t)=u'(t)+u(t)$

c) Systém má dva póly $p_1=0;\, p_2=-1/0,2=-5$ a jednu nulu $n_1=-1$

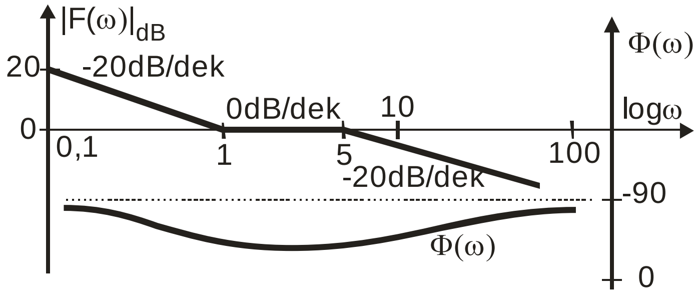


d) Pro fázovou charakteristiku platí $\Phi(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}+arctg\omega-arctg0,2\omega$. Platí

$\Phi(0)=-\dfrac{\pi}{2}+0-0=-\dfrac{\pi}{2},\quad \Phi(\infty)=-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$ a pro extrém platí

$$\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}\left(-\frac{\pi}{2}+arctg\omega-arctg0,2\omega\right)=\frac{1}{1+\omega^2}-\frac{0,2}{1+0,04\omega^2}=\frac{1+0,04\omega^2-0,2-0,2\omega^2}{\left(1+\omega^2\right)\left(1+0,04\omega^2\right)}\Rightarrow$$

$$0,8-0,16\omega^2=0 \quad\Rightarrow\quad \omega=\sqrt{\frac{0,8}{0,16}}=\sqrt{5}\doteq 2,2$$



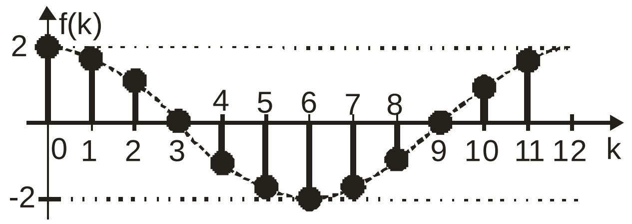
3. Je dán spojitý periodický signál $f(t) = A\cos\omega_0 t$ s parametry $A = 2, \omega_0 = 1$, který je třeba vzorkovat. (**15b**)

a) Určete minimální vzorkovací kmitočet. Zvolte vzorkovací kmitočet jako šestinásobek minimálního vzorkovacího kmitočtu a určete počet vzorků v jedné periodě spojitého signálu.(**5b**)
b) Napište výraz pro takto získaný diskrétní signál a načrtněte jeho jednu periodu. Popište a ocejchujte osy. (**5b**)
c) Vypočtěte a načrtněte spektrum tohoto diskrétního signálu pro $m = 0,1,...N$. (**5b**)

Řešení:

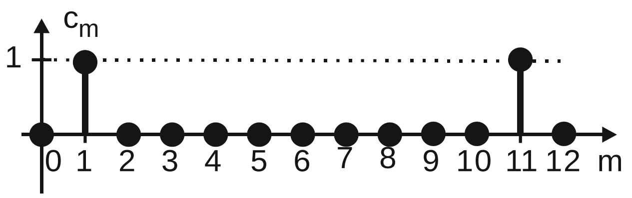
a) Jelikož nejvyšší kmitočet ve spektru spojitého signálu je $\omega_0 = 1$ je minimální vzorkovací kmitočet $\omega_{s\min} = 2\omega_0 = 2rad/\sec$. Pro vzorkovací kmitočet pak podle zadání platí $\omega_s = 6\omega_{s\min} = 12rad/\sec$. Perioda spojitého signálu je $P = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$, perioda vzorkovacího kmitočtu je $T_s = 2\pi/\omega_s = 2\pi/12 = \pi/6$. Pro počet vzorků v jedné periodě spojitého signálu platí $N = \dfrac{P}{T_s} = \dfrac{2\pi}{\pi/6} = 12$.

b) Platí $f(k) = A\cos\dfrac{2\pi}{12}k = A\cos\dfrac{\pi}{6}k \quad k \in (-\infty, +\infty)$.



c) Platí

$$f(k) = 2\cos\frac{2\pi}{12}k = 2\frac{e^{j\frac{2\pi}{12}k} + e^{-j\frac{2\pi}{12}k}}{2} = e^{j\frac{2\pi}{12}k} + e^{j\frac{2\pi}{12}(12-1)k} = e^{j\frac{2\pi}{12}k} + e^{j\frac{2\pi}{12}11k} \Rightarrow c_i = \begin{cases} 1 & i = 1,11 \\ 0 & i \neq 1,11 \end{cases}$$



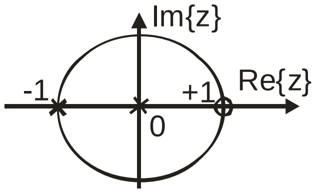
4. Diskrétní systém je popsán diferenční rovnicí $y(k)+y(k-1)=u(k-1)-u(k-2)$. **(20b)**

a) Určete operátorový přenos systému (**5b**)
b) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy (**3b**). Rozhodněte o stabilitě systému. (**2b**)
c) Vypočtěte impulsní charakteristiku systému (**6b**) a načrtněte ji pro k=0,1,2,3,4,5 (**4b**). Popište osy a ocejchujte je.

Řešení:
a) Platí

$$Y(z)+z^{-1}Y(z)=z^{-1}U(z)-z^{-2}U(z) \quad \Rightarrow Y(z)\left(1+z^{-1}\right)=U(z)\left(z^{-1}-z^{-2}\right) \quad \Rightarrow F(z)=\frac{z^{-1}-z^{-2}}{1+z^{-1}}=\frac{z-1}{z(z+1)}$$

a) Systém má dva póly $z_1=0, z_2=-1$ a jednu nulu $n_1=1$. Systém je na mezi stability neboť jeden pól leží na jednotkové kružnici.



b) Impulsní charakteristika -první možnost řešení:

$$g(k)=\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-1}-z^{2}}{1+z^{-1}}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}-\frac{z^{-2}}{1+z^{-1}}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}\right\}-\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-2}}{1+z^{-1}}\right\}=g_1(k)-g_2(k)$$

$$g_1(k)=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-1}\frac{1}{1+z^{-1}}\right\}=\begin{cases}(-1)^{k-1} & k\geq 1\\ 0 & k<1\end{cases}$$

$$g_2(k)=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-2}}{1+z^{-1}}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-2}\frac{1}{1+z^{-1}}\right\}=\begin{cases}(-1)^{k-2} & k\geq 2\\ 0 & k<2\end{cases} \quad \Rightarrow \quad g(k)=\begin{cases}0 & k=0\\ (-1)^{k-1} & k=1\\ (-1)^{k-1}-(-1)^{k-2} & k\geq 2\end{cases}$$

$k=0 \quad g(0)=0$

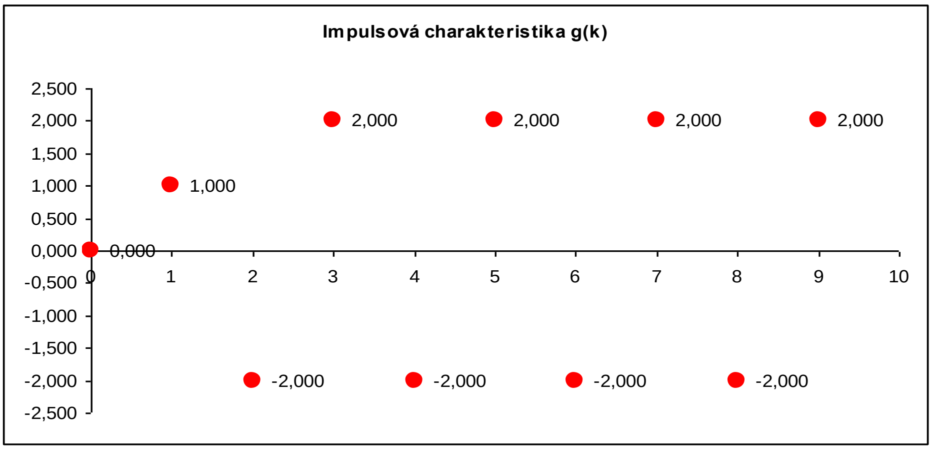
$k=1 \quad g(1)=(-1)^{1-1}=(-1)^{0}=+1$

$k=2 \quad g(2)=(-1)^{2-1}-(-1)^{2-2}=(-1)^{1}-(-1)^{0}=-1-1=-2$

$k=3 \quad g(3)=(-1)^{3-1}-(-1)^{3-2}=(-1)^{2}-(-1)^{1}=+1+1=+2$

$k=4 \quad g(4)=(-1)^{4-1}-(-1)^{4-2}=(-1)^{3}-(-1)^{2}=-1-1=-2$

$k=5 \quad g(5)=(-1)^{5-1}-(-1)^{5-2}=(-1)^{4}-(-1)^{3}=+1+1=+2$



Impulsní charakteristika-druhá možnost řešení= dělení polynomu polynomem

čitatel			jmenovatel			podíl					
z^2	z^1	z^0	z^2	z^1	z^0	z^0	z^(-1)	z(-2)	z^(-3)	z^(-4)	z^(-5)
0	1	-1	1	1	0	0,000	1,000	-2,000	2,000	-2,000	2,000

0	0	0									
0	1	-1									
	1	1	0								
	0	-2	0								
		-2	-2	0							
		0	2	0	0						
			2	2	0						
			0	-2	0						
				-2	-2	0					
				0	2	0					
					2	2	0				
					0	-2	0				
						-2	-2	0			
						0	2	0			
							2	2	0		
							0	-2	0		
								-2	-2	0	
								0	2	0	
									2	2	0
									0	-2	0

Třetí možnost řešení:

$$F\left(z\right)=\frac{z-1}{z\left(z+1\right)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}=\frac{Az+A+Bz}{z\left(z+1\right)}\Rightarrow \begin{matrix}A=-1\\ B=+2\end{matrix}\Rightarrow F\left(z\right)=\frac{-1}{z}+\frac{2}{z+1}=-z^{-1}+\frac{2z^{-1}}{1+z^{-1}}\Rightarrow$$

$$g\left(k\right)=-\delta\left(k-1\right)+2\left(-1\right)^{k-1}\quad pro\quad k\geq 1,\quad g\left(k\right)=0\quad pro\quad k<1$$

$$g\;\;k\;=\begin{cases}0 & k<1\\ 1 & k=1\\ 2\;\;-1^{\;k-1} & k>1\end{cases}$$