

1. Signál se spojitým časem $f(t)$ má tvar Diracova impulsu tj. $f(t) = 5\delta(t)$. (15b)

a) Vypočtete spektrum tohoto signálu. (10b)

b) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum signálu $f(t)$ (5b).

Řešení

a) Signál $\delta(t)$ nahradíme signálem $\delta(t, \varepsilon) = \begin{cases} 1/\varepsilon & t \in (-\varepsilon/2, +\varepsilon/2) \\ 0 & t \notin (-\varepsilon/2, +\varepsilon/2) \end{cases}$, vypočteme jeho spektrum a potom provedeme ve spektru limitní přechod $\varepsilon \rightarrow 0$.

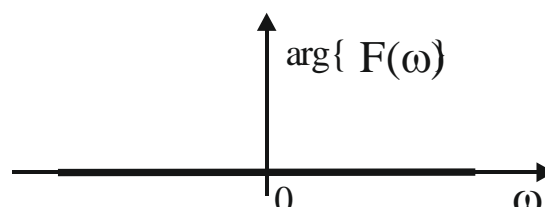
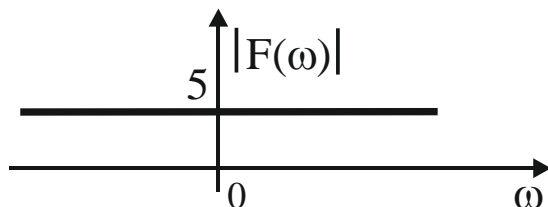
$$F(\omega, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} 5\delta(t, \varepsilon) e^{-j\omega t} dt = 5 \int_{-\varepsilon/2}^{+\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} e^{-j\omega t} dt = \frac{5}{\varepsilon} \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\varepsilon/2}^{+\varepsilon/2} = \frac{5}{\varepsilon} \frac{e^{-j\omega\varepsilon/2} - e^{+j\omega\varepsilon/2}}{-j\omega} = 5 \frac{e^{+j\omega\varepsilon/2} - e^{-j\omega\varepsilon/2}}{-j\omega\varepsilon} = 5 \frac{\sin \frac{\omega\varepsilon}{2}}{\frac{\omega\varepsilon}{2}}$$

$$F(\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\omega, \varepsilon) = 5 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\omega\varepsilon}{2}}{\frac{\omega\varepsilon}{2}} = 5 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega\varepsilon}{2}}{\frac{\omega}{2}} = 5$$

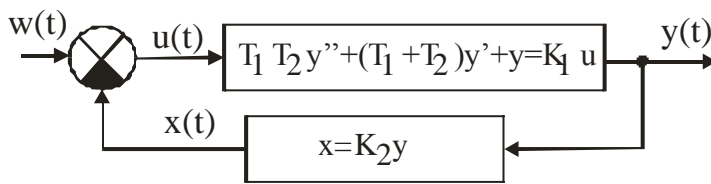
Jiná možnost řešení (využití filtrační vlastnosti Diracovy funkce):

$$F(\omega) = 5 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 5 e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 5$$

b) Amplitudové a fázové spektrum signálu



2. Je dáno zpětnovazební zapojení dvou spojitých lineárních systémů (20 b)



- a) Určete operátorový přenos výsledného spojení obou systémů. (5b)
 b) Určete velikost konstanty K_2 tak, aby celý systém byl na mezi aperiodicity. (5b)
 c) Určete ustálenou hodnotu přechodové charakteristiky celého spojení. (5b)
 d) Načrtněte přechodovou charakteristiku celého spojení pro K_2 vypočtené v bodě b). (5 b)

Řešení

- a) Pro jednotlivé operátorové přenosy platí: $F_1(p) = \frac{K_1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$, $F_2(p) = K_2$. Pro výsledný

přenos bude platit:

$$F(p) = \frac{\frac{K_1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}}{1 + \frac{K_1 K_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}} = \frac{K_1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + K_1 K_2} = \frac{K_1}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1 + K_1 K_2} =$$

$$= \frac{K_1}{K_1 K_2 + 1} \frac{1}{\frac{T_1 T_2}{1 + K_1 K_2} p^2 + \frac{(T_1 + T_2)}{1 + K_1 K_2} p + 1}$$

Jedná se o statický systém 2. řádu s operátorovým přenosem $F(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$ a srovnáním

obdržíme:

$$K = \frac{K_1}{K_1 K_2 + 1} \quad T = \sqrt{\frac{T_1 T_2}{1 + K_1 K_2}} \quad 2\xi T = \frac{(T_1 + T_2)}{1 + K_1 K_2} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2T} \frac{(T_1 + T_2)}{1 + K_1 K_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + K_1 K_2}{T_1 T_2}} \frac{(T_1 + T_2)}{1 + K_1 K_2}$$

- b) Aby byl systém na mezi aperiodicity musí být $\xi = 1$. Tedy

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + K_1 K_2}{T_1 T_2}} \frac{(T_1 + T_2)}{1 + K_1 K_2} = 1 \Rightarrow (T_1 + T_2) \sqrt{1 + K_1 K_2} = 2 \sqrt{T_1 T_2} (1 + K_1 K_2) \Rightarrow$$

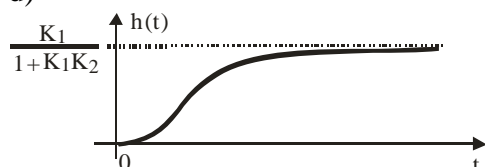
$$\Rightarrow (T_1 + T_2)^2 (1 + K_1 K_2) = 4 T_1 T_2 (1 + K_1 K_2)^2 \Rightarrow (T_1 + T_2)^2 = 4 T_1 T_2 (1 + K_1 K_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + K_1 K_2 = \frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} \Rightarrow K_1 K_2 = \frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} - 1 \Rightarrow K_2 = \frac{1}{K_1} \left[\frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} - 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{K_1} \frac{T_1^2 + 2 T_1 T_2 + T_2^2 - 4 T_1 T_2}{4 T_1 T_2} = \frac{1}{K_1} \frac{(T_1 - T_2)^2}{4 T_1 T_2}$$

- c) Ustálená hodnota přechodové charakteristiky je rovna zesílení celého systému tj. $K_1 / (1 + K_1 K_2)$.

d)

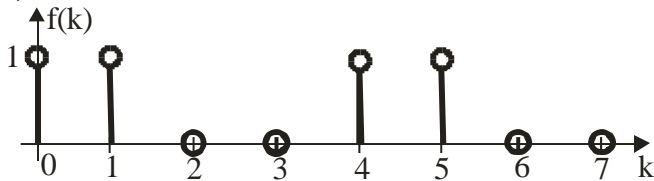


3. Je dán diskrétní signál $f(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} [\delta(k-4i) + \delta(k-4i-1)]$ (15b)

- a) Načrtněte signál pro $k \in \langle 0, 7 \rangle$ a rozhodněte, zda je periodický. (3b)
 b) Vypočtěte spektrum signálu. (4b)
 c) Načrtněte amplitudové spektrum pro $m = 0, 1, \dots, 7$. Ocejchujte osy. (4b)
 d) Načrtněte fázové spektrum pro $m = 0, 1, \dots, 7$. Ocejchujte osy. (4b)

Řešení:

a)



Signál je periodický s periodou $N = 4$.

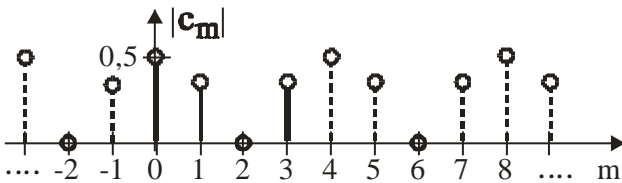
$$b) c_0 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f(k) e^{-j0 \frac{2\pi}{4} k} = \frac{1}{4} (1.1 + 1.1 + 0.1 + 0.1) = 0,5e^{j0^\circ}$$

$$c_1 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f(k) e^{-j1 \frac{2\pi}{4} k} = \frac{1}{4} (1.1 + 1.e^{-j\frac{\pi}{2}} + 0.e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 2} + 0.e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 3}) = \frac{1-j}{4} = 0,35e^{-j45^\circ}$$

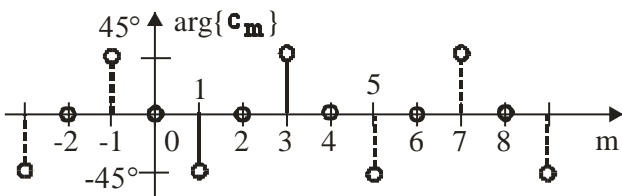
$$c_2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f(k) e^{-j2 \frac{2\pi}{4} k} = \frac{1}{4} (1.1 + 1.e^{-j2\frac{\pi}{2}} + 0.e^{-j2\frac{\pi}{2} \cdot 2} + 0.e^{-j2\frac{\pi}{2} \cdot 3}) = \frac{1-1}{4} = 0$$

$$c_3 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f(k) e^{-j3 \frac{2\pi}{4} k} = \frac{1}{4} (1.1 + 1.e^{-j3\frac{\pi}{2}} + 0.e^{-j3\frac{\pi}{2} \cdot 2} + 0.e^{-j3\frac{\pi}{2} \cdot 3}) = \frac{1+j}{4} = 0,35e^{+j45^\circ}$$

c) $|c_0| = 0,5 \quad |c_1| = 0,35 \quad |c_2| = 0 \quad |c_3| = 0,35$



d) $\arg\{c_0\} = 0 \quad \arg\{c_1\} = -45^\circ \quad \arg\{c_2\} = 0 \quad \arg\{c_3\} = +45^\circ$



4. Spojitý lineární systém má jeden pól $p_1 = -2$ a jednu nulu $n_1 = 0$ a koeficient u nejvyšší mocniny čitatele přenosu je 20.

Vypočtete ekvivalentní Z přenos tohoto systému a tomu odpovídající diferenční rovnici diskretizovaného spojitého systému. Periodu vzorkování označte T . (20b)

Řešení

a) Pro operátorový přenos systému platí $F(p) = \frac{20p}{p+2}$ (5b)

b) Pro přechodovou charakteristiku platí: $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} F(p) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \frac{20p}{p+2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{20}{p+2} \right\} = 20e^{-2t}$

(5b)

c) Vzorkováním ($t = kT, k \in \langle 0, \infty \rangle$) přechodové charakteristiky obdržíme posloupnost: $h(k) = 20e^{-2kT}$

Z- obraz této posloupnosti bude: $\mathcal{Z} \{h(k)\} = \mathcal{Z} \{20e^{-2kT}\} = 20 \frac{z}{z - e^{-2T}}$ (5b)

d) Pro ekvivalentní přenos platí:

$$F_e(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \{h(k)\} = \frac{z-1}{z} \frac{20z}{z - e^{-2T}} = 20 \frac{z-1}{z - e^{-2T}} = 20 \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1}e^{-2T}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

diferenční rovnice bude

$$Y(z)(1 - z^{-1}e^{-2T}) = 20U(z)(1 - z^{-1}) \Rightarrow y(k) - e^{-2T}y(k-1) = 20[u(k) - u(k-1)] \quad (5b)$$