

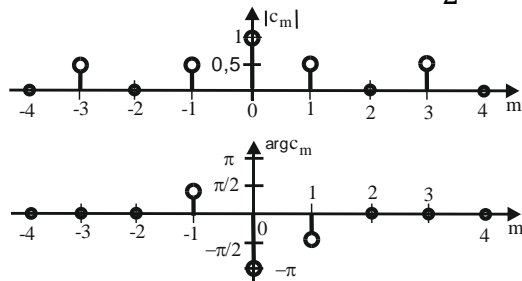
1. Je dáno spektrum spojitého signálu $c_0 = -1$ $c_{-1} = +j0,5$ $c_{+1} = -j0,5$ $c_{-3} = 0,5$ $c_{+3} = 0,5$ a ostatní koeficienty jsou nulové. (15b)

- a) Zdůvodněte proč je signál periodický. (4b)
 b) Načrtněte jeho amplitudové (2b) a fázové spektrum (2b). Ocejchujte osy.
 c) Napište výraz pro tento signál pro periodu $P=1$. (5b)
 d) Jaká je hodnota stejnosměrné složky tohoto signálu. (1b)
 e) Které harmonické složky tento signál obsahuje. (1b)

Řešení:

a) Signál je periodický protože má diskrétní spektrum

b) $|c_0| = 1$ $|c_{-1}| = |c_{+1}| = 0,5$ $|c_{-3}| = |c_{+3}| = 0,5$
 $\arg\{c_0\} = \pm\pi$ $\arg\{c_{-1}\} = +\frac{\pi}{2}$ $\arg\{c_{+1}\} = -\frac{\pi}{2}$ $\arg\{c_{-3}\} = 0$ $\arg\{c_{+3}\} = 0$



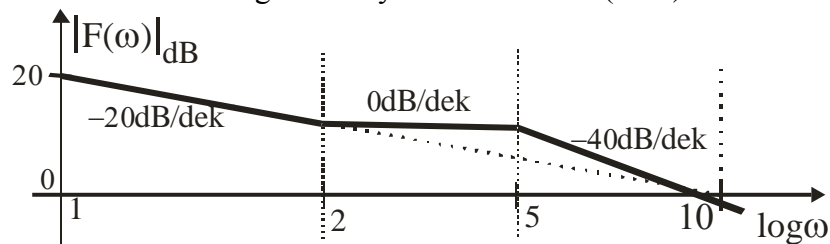
c)
$$f(t) = 0,5e^{-j6\pi t} + j0,5e^{-j2\pi t} - 1 - j0,5e^{j2\pi t} + 0,5e^{j6\pi t} = -1 + \frac{e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}}{2j} + \frac{e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}}{2} =$$

$$= -1 + \sin 2\pi t + \cos 6\pi t$$

d) Hodnota stejnosměrné složky je -1.

e) Signál obsahuje první a třetí harmonickou složku.

2. Spojitý lineární systém bez dopravního zpoždění má asymptotickou amplitudovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích (20 b):



- Určete operátorový přenos systému (5 b)
- Určete jeho diferenciální rovnici (3b)
- Načrtněte rozložení pólů a nul (5 b)
- Na vstup systému působí harmonický signál $u(t) = U_0 e^{j2t}$ kde $U_0 = 1,16 / \sqrt{2}$. Určete amplitudu výstupního harmonického signálu po odeznění přechodových dějů. (7b)

Řešení

- Operátorový přenos je tvaru $F(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)^2}$ kde $\frac{1}{T_1} = 2 \Rightarrow T_1 = 0,5$ a podobně

$$\frac{1}{T_2} = 5 \Rightarrow T_2 = 0,2. \text{ Konstantu } K \text{ určíme ze vztahu:}$$

$$20 \log(K/\omega)_{\omega=1} = 20 \text{ dB} \Rightarrow 20 \log(K) = 20 \text{ dB} \Rightarrow \log K = 1 \Rightarrow K = 10. \text{ Bude tedy}$$

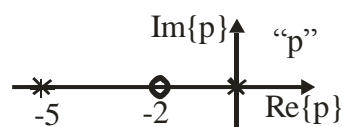
$$F(p) = \frac{10(0,5p+1)}{p(0,2p+1)^2}$$

- Pro operátorový přenos platí:

$$F(p) = \frac{10(0,5p+1)}{p(0,2p+1)^2} = \frac{10(0,5p+1)}{p(0,04p^2+0,4p+1)} = \frac{5p+10}{0,04p^3+0,4p^2+p} = \frac{Y(p)}{U(p)}. \text{ A tedy platí:}$$

$$Y(p)(0,04p^3+0,4p^2+p) = (5p+10)U(p) \Rightarrow 0,04y''' + 0,4y'' + y' = 5u' + 10u$$

- Systém má jednu nulu $n_1 = -2$, jeden dvojnásobný pól $p_{1,2} = -1/T_2 = -1/0,2 = -5$ a jeden pól v nule.



- Pro absolutní hodnotu frekvenčního přenosu platí

$$|F(j\omega)| = |F(p=j\omega)| = \left| \frac{10(0,5j\omega+1)}{j\omega(0,2j\omega+1)^2} \right| = \frac{10\sqrt{0,25\omega^2+1}}{|\omega|(0,04\omega^2+1)}$$

Pro amplitudu výstupního harmonického signálu bude platit:

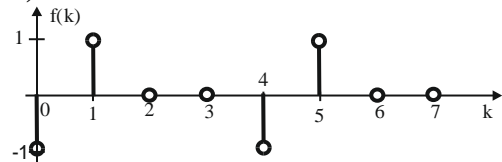
$$A = U_0 |F(j\omega)|_{\omega=2} = U_0 \frac{10\sqrt{0,25\omega^2+1}}{|\omega|(0,04\omega^2+1)} \Big|_{\omega=2} = \frac{1,16}{\sqrt{2}} \frac{10\sqrt{1+1}}{2(0,16+1)} = \frac{1,16}{2\sqrt{2}} \frac{10\sqrt{2}}{1,16} = 5$$

3. Pro všechna celá čísla $i \in (-\infty, +\infty)$ je dán diskrétní signál $f(k) = \begin{cases} -1 & k = 4i \\ 1 & k = 4i + 1 \\ 0 & k = 4i + 2 \\ 0 & k = 4i + 3 \end{cases}$ (15b)

- a) Načrtněte signál pro $i = 0$ a $i = 1$ a rozhodněte, zda je periodický. (2b)
 b) Vypočítejte spektrum signálu. (5b)
 c) Načrtněte amplitudové spektrum pro $m = 0, 1, \dots, 7$. Ocejchujte osy. (4b)
 d) Načrtněte fázové spektrum pro $m = 0, 1, \dots, 7$. Ocejchujte osy. (4b)

Řešení

a)



Signál je periodický s periodou $N = 4$.

b)

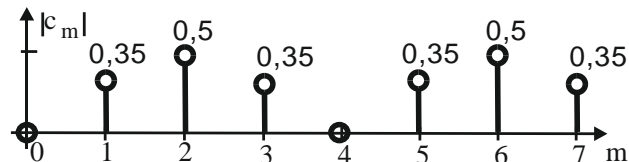
$$c_0 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f(k) e^{-j0 \frac{2\pi}{4} k} = \frac{1}{4} (-1 + 1 + 0 + 0) = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f(k) e^{-j1 \frac{2\pi}{4} k} = \frac{1}{4} (-1 + e^{-j\frac{\pi}{2} 1}) = \frac{-1 - j}{4} = 0,35 e^{-j135^\circ}$$

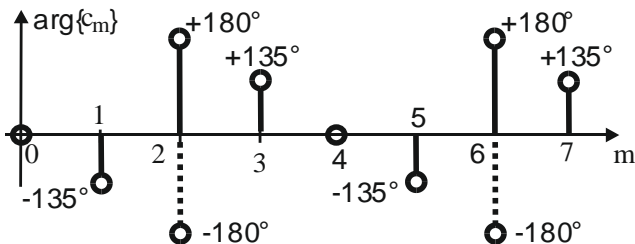
$$c_2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f(k) e^{-j2 \frac{2\pi}{4} k} = \frac{1}{4} (-1 + e^{-j2 \frac{\pi}{2} 1}) = \frac{-1 - 1}{4} = -1/2$$

$$c_3 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f(k) e^{-j3 \frac{2\pi}{4} k} = \frac{1}{4} (-1 + e^{-j3 \frac{\pi}{2} 1}) = \frac{-1 + j}{4} = 0,35 e^{+j135^\circ}$$

c)



d)



4. Diskrétní systém má 2 póly $z_1 = 0,4$ $z_2 = -0,6$ a žádnou nulu a podíl koeficientů u nejvyšších mocnin polynomů operátorového přenosu je 1. **(20b)**

a) Napište operátorový přenos systému. **(2b)**

b) Napište diferenční rovnici **(2b)**

c) Určete impulsní charakteristiku **(4b)** a načrtněte ji pro $k = 0,1,2,3,4$. **(4b)**

d) Vypočítejte **(4b)** a načrtněte přechodovou charakteristiku pro $k = 0,1,2,3,4$. **(4b)**

Řešení:

a)

$$F(z) = \frac{1}{(z - 0,4)(z + 0,6)} = \frac{1}{z^2 + 0,2z - 0,24} = \frac{z^{-2}}{1 + 0,2z^{-1} - 0,24z^{-2}}$$

b)

$$Y(z)(1 + 0,2z^{-1} - 0,24z^{-2}) = z^{-2}U(z)$$

$$y(k) + 0,2y(k - 1) - 0,24y(k - 2) = u(k - 2)$$

c)

$$F(z) = \frac{1}{z^2 + 0,2z - 0,24} = \frac{A}{(z - 0,4)} + \frac{B}{(z + 0,6)} = \frac{Az + 0,6A + Bz - 0,4B}{(z - 0,4)(z + 0,6)}$$

$$A + B = 0 \Rightarrow A = -B; \Rightarrow A = 1; B = -1 \quad F(z) = \frac{1}{z - 0,4} - \frac{1}{z + 0,6}$$

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-0,4}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+0,6}\right\} = \begin{cases} 0,4^{k-1} - (-0,6)^{k-1} & k \geq 1 \\ 0 & k < 1 \end{cases}$$

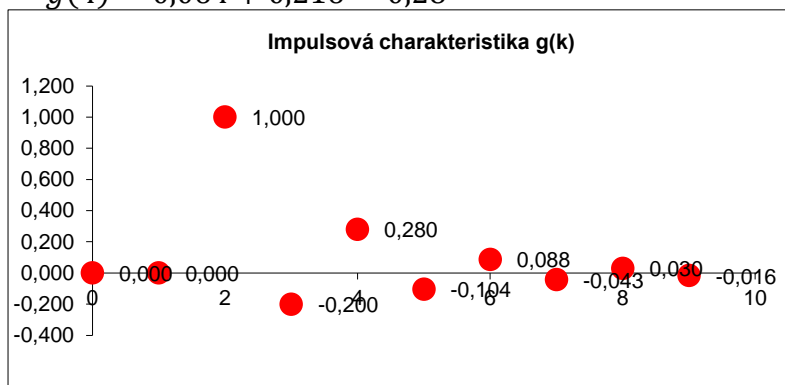
$$g(0) = 0$$

$$g(1) = 1 - 1 = 0$$

$$g(2) = 0,4 + 0,6 = 1$$

$$g(3) = 0,16 - 0,36 = -0,2$$

$$g(4) = 0,064 + 0,216 = 0,28$$



d)

První způsob: numericky z impulsní charakteristiky

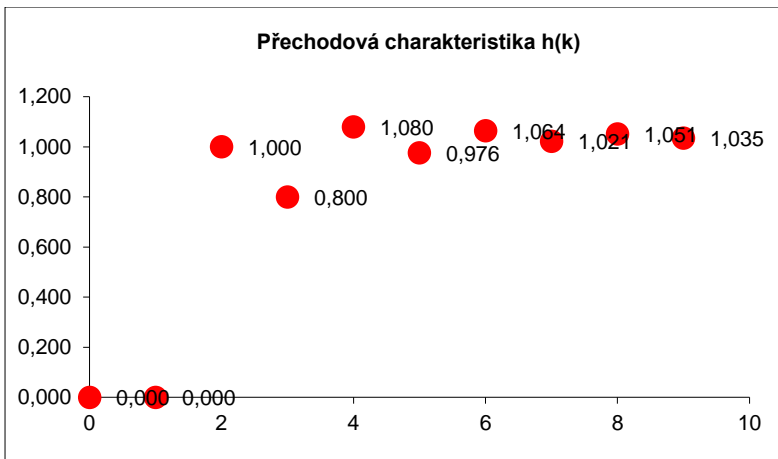
$$h(0) = g(0) = 0$$

$$h(1) = h(0) + g(1) = 0 + 0 = 0$$

$$h(2) = h(1) + g(2) = 0 + 1 = 1$$

$$h(3) = h(2) + g(3) = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$h(4) = h(3) + g(4) = 0,8 + 0,28 = 1,08$$



Druhý způsob: analyticky z impulsní charakteristiky

$$\begin{aligned}
 h(k) &= \sum_{i=0}^k g(i) = \sum_{i=1}^k 0,4^{i-1} - \sum_{i=1}^k (-0,6)^{i-1} = \\
 &= (0,4)^{-1} \left(\sum_{i=0}^k 0,4^i - 1 \right) + (0,6)^{-1} \left(\sum_{i=0}^k (-0,6)^i - 1 \right) = \\
 &= (0,4)^{-1} \frac{1 - (0,4)^{k+1}}{1 - 0,4} - (0,4)^{-1} + (0,6)^{-1} \frac{1 - (-0,6)^{k+1}}{1 + 0,6} - (0,6)^{-1} = \\
 &= \frac{1 - (0,4)^{k+1}}{0,24} + \frac{1 - (-0,6)^{k+1}}{0,96} - \frac{1}{0,4} - \frac{1}{0,6}
 \end{aligned}$$

$$h(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
 h(1) &= \frac{1 - (0,4)^2}{0,24} + \frac{1 - (-0,6)^2}{0,96} - \frac{1}{0,4} - \frac{1}{0,6} = \frac{0,84}{0,24} + \frac{0,64}{0,96} - \frac{1}{0,24} = \\
 &= \frac{0,84}{0,24} + \frac{0,16}{0,24} - \frac{1}{0,24} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(2) &= \frac{1 - (0,4)^3}{0,24} + \frac{1 - (-0,6)^3}{0,96} - \frac{1}{0,4} - \frac{1}{0,6} = \frac{0,936}{0,24} + \frac{1,216}{0,96} - \frac{1}{0,24} = \\
 &= \frac{0,936}{0,24} + \frac{0,304}{0,24} - \frac{1}{0,24} = 1
 \end{aligned}$$