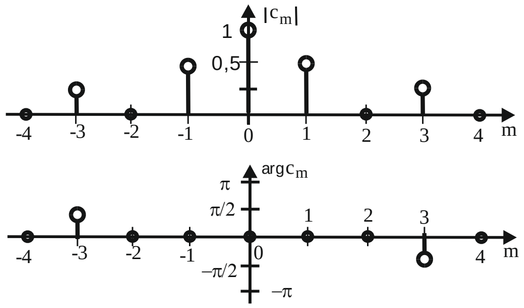
B/KSAS 2013 Termín 1A, 15.1.2014	Jméno	ID

1. Je dáno spektrum spojitého signálu $c_0 = 1$ $c_{-1} = 0{,}5$ $c_{+1} = 0{,}5$ $c_{-3} = 0{,}25\mathrm{j}$ $c_{+3} = -0{,}25\mathrm{j}$ ostatní koeficienty jsou nulové. **(15b)**

a) Zdůvodněte proč je signál periodický. **(4b)**
b) Načrtněte jeho amplitudové **(2b)** a fázové **(2b)** spektrum. Ocejchujte osy.
c) Napište výraz pro tento signál pro periodu *P*=1. **(5b)**
d) Jaká je hodnota stejnosměrné složky tohoto signálu. **(1b)**
e) Které harmonické složky tento signál obsahuje. **(1b)**

Řešení
a)
Signál je periodický protože má diskrétní spektrum
b)
$|c_0| = 1$ $|c_{-1}| = |c_{+1}| = 0{,}5$ $|c_{-3}| = |c_{+3}| = 0{,}25$
$\arg\{c_0\} = 0$ $\arg\{c_{-1}\} = \arg\{c_{+1}\} = 0$ $\arg\{c_{-3}\} = +\frac{\pi}{2}$ $\arg\{c_{+3}\} = -\frac{\pi}{2}$

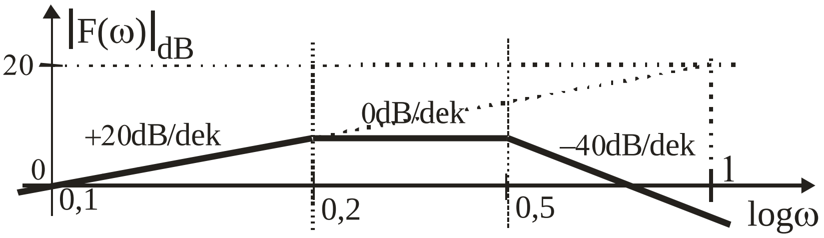


c)
$$f(t) = 0{,}25je^{-j6\pi t} + 0{,}5e^{-j2\pi t} + 1 + 0{,}5e^{j2\pi t} - 0{,}25\mathrm{j}e^{j6\pi t} = 1 + \frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{j6\pi t} - e^{-j6\pi t}}{2\mathrm{j}}$$
$$= 1 + \cos 2\pi t + \frac{1}{2}\sin 6\pi t$$

d) Hodnota stejnosměrné složky je 1.

e) Signál obsahuje první a třetí harmonickou složku.

2. Spojitý lineární systém bez dopravního zpoždění má asymptotickou amplitudovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích (**20 b**):



a. Určete operátorový přenos systému (**5b**)
b. Určete jeho diferenciální rovnici (**3b**)
c. Načrtněte rozložení pólů a nul (**5 b**)
d. Na vstup systému působí harmonický signál $u(t) = U_0 e^{jt/5}$ kde $U_0 = 29\sqrt{2}$. Určete amplitudu výstupního harmonického signálu po odeznění přechodových dějů. (**7b**)

Řešení

a) Operátorový přenos je tvaru $F(p) = \dfrac{Kp}{(T_1 p+1)(T_2 p+1)^2}$ kde $\dfrac{1}{T_1} = 0{,}2 \;\Rightarrow\; T_1 = 5$ a podobně

$\dfrac{1}{T_2} = 0{,}5 \;\Rightarrow\; T_2 = 2$. Konstantu K určíme ze vztahu:

$20\log(K\omega)_{\omega=0{,}1} = 0dB \;\Rightarrow\; 20\log(0{,}1K) = 0dB \;\Rightarrow\; 0{,}1K = 1 \;\Rightarrow K = 10$. Bude tedy

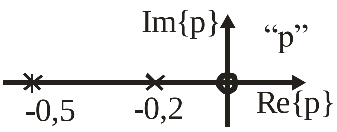
$$F(p) = \frac{10p}{(5p+1)(2p+1)^2}$$

b) Pro operátorový přenos platí:

$$F(p) = \frac{10p}{(5p+1)(2p+1)^2} = \frac{10p}{(5p+1)(4p^2+4p+1)} = \frac{10p}{20p^3+24p^2+9p+1} = \frac{Y(p)}{U(p)}.$$ A tedy platí:

$$Y(p)\left(20p^3+24p^2+9p+1\right) = 10pU(p) \;\Rightarrow\; 20y''' + 24y'' + 9y' + y = 10u'$$

c) Systém má jednu nulu $n_1 = 0$ a tři póly, z toho jeden jednoduchý $p_1 = -1/T_1 = -1/5 = -0{,}2$ a jeden dvojnásobný $p_{2,3} = -1/T_2 = -1/2 = -0{,}5$.



d) Pro absolutní hodnotu frekvenčního přenosu platí

$$|F(j\omega)| = |F(p=j\omega)| = \left|\frac{10j\omega}{(5j\omega+1)(2j\omega+1)^2}\right| = \frac{10\omega}{\sqrt{25\omega^2+1}\left(4\omega^2+1\right)}$$

Pro amplitudu výstupního harmonického signálu bude platit:

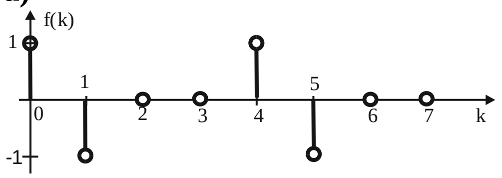
$$A = U_0 |F(j\omega)|_{\omega=1/5} = U_0 \left.\frac{10\omega}{\sqrt{25\omega^2+1}\left(4\omega^2+1\right)}\right|_{\omega=1/5} = 29\sqrt{2}\,\frac{2}{\sqrt{1+1}\,(4/25+1)} = 29\sqrt{2}\,\frac{50}{29\sqrt{2}} = 50$$

3. Pro všechna celá čísla $i \in (-\infty, +\infty)$ je dán diskrétní signál $f(k) = \begin{cases} 1 & k = 4i \\ -1 & k = 4i+1 \\ 0 & k = 4i+2 \\ 0 & k = 4i+3 \end{cases}$ **(15b)**

a) Načrtněte signál pro $i = 0$ a $i = 1$ a rozhodněte, zda je periodický. **(2b)**
b) Vypočtěte spektrum signálu. **(5b)**
c) Načrtněte amplitudové spektrum pro $m = 0,1,\ldots 7$. Ocejchujte osy. **(4b)**
d) Načrtněte fázové spektrum pro $m = 0,1,\ldots 7$. Ocejchujte osy. **(4b)**

Řešení

a)



Signál je periodický s periodou $N = 4$.

b)

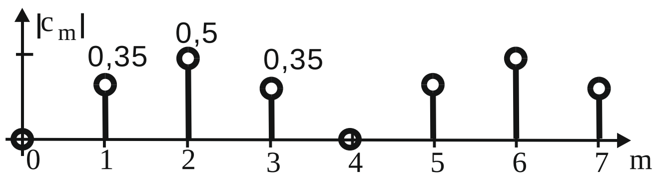
$$c_0 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j0\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}(1-1+0+0) = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j1\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-j\frac{\pi}{2}1}\right) = \frac{1+j}{4} = 0{,}35e^{+j45°}$$

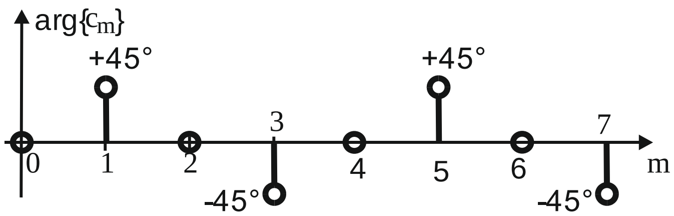
$$c_2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j2\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-j2\frac{\pi}{2}1}\right) = \frac{1+1}{4} = 1/2$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j3\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-j3\frac{\pi}{2}1}\right) = \frac{1-j}{4} = 0{,}35e^{-j45°}$$

c)



d)



4. Diskrétní systém má 2 póly $z_1 = -0{,}4\ z_2 = +0.6$ a žádnou nulu a podíl koeficientů u nejvyšších mocnin polynomů operátorového přenosu je 1. **(20b)**

a) Napište operátorový přenos systému. (**2b**)

b) Napište diferenční rovnici (**2b**)

c) Určete impulsní charakteristiku (**4b**) a načrtněte ji pro $k = 0,1,2,3,4$. (**4b**)

d) Vypočtěte (**4b**) a načrtněte přechodovou charakteristiku pro $k = 0,1,2,3,4$. (**4b**)

Řešení 6.1.14:

a)

$$F(z) = \frac{1}{(z+0{,}4)(z-0{,}6)} = \frac{1}{z^2 - 0{,}2z - 0{,}24} = \frac{z^{-2}}{1 - 0{,}2z^{-1} - 0{,}24z^{-2}}$$

b)

$$Y(z)(1 - 0{,}2z^{-1} - 0{,}24z^{-2}) = z^{-2}U(z)$$
$$y(k) - 0{,}2y(k-1) - 0{,}24y(k-2) = u(k-2)$$

c)

$$F(z) = \frac{1}{z^2 - 0{,}2z - 0{,}24} = \frac{Az + 0{,}4A + Bz - 0{,}6B}{(z-0{,}6)(z+0{,}4)}$$

$$A + B = 0 \quad \Rightarrow A = -B; \quad \Rightarrow \quad A = 1; B = -1 \quad F(z) = \frac{1}{z-0{,}6} - \frac{1}{z+0{,}4}$$

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-0{,}6}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+0{,}4}\right\} = \begin{cases} 0{,}6^{k-1} - (-0{,}4)^{k-1} & k \geq 1 \\ 0 & k < 1 \end{cases}$$

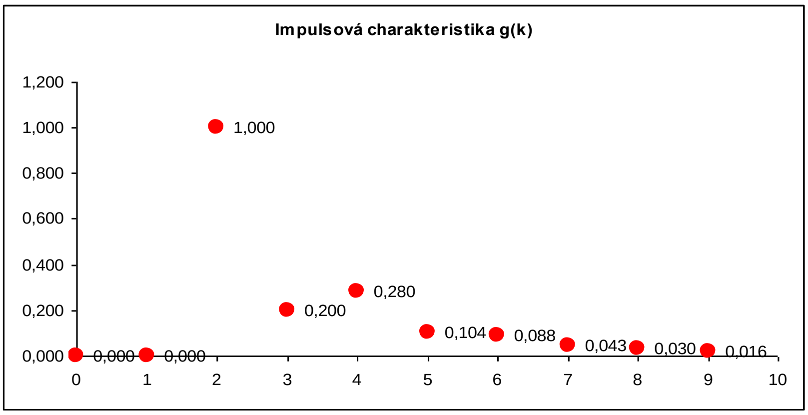
$g(0) = 0$

$g(1) = 1 - 1 = 0$

$g(2) = 0{,}6 + 0{,}4 = 1$

$g(3) = 0{,}36 - 0{,}16 = 0{,}2$

$g(4) = 0{,}216 + 0{,}064 = 0{,}28$



d)

První způsob: numericky z impulsní charakteristiky

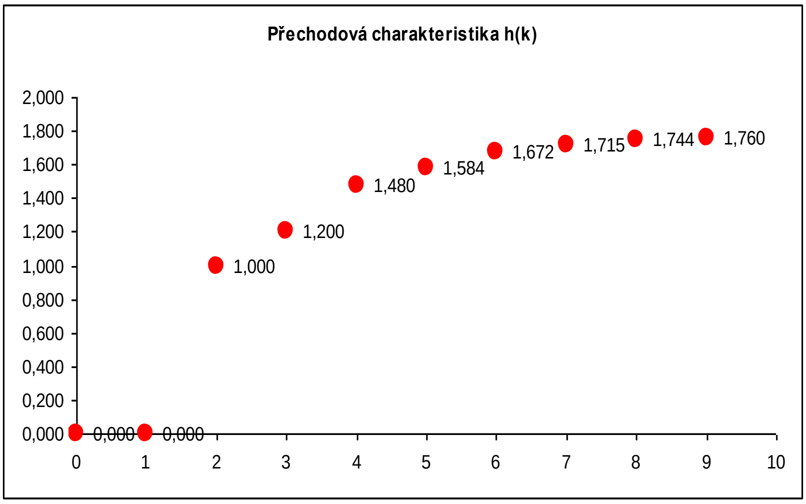
$h(0) = g(0) = 0$

$h(1) = h(0) + g(1) = 0 + 0 = 0$

$h(2) = h(1) + g(2) = 0 + 1 = 1$

$h(3) = h(2) + g(3) = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$

$h(4) = h(3) + g(4) = 1{,}2 + 0{,}28 = 1{,}48$



Druhý způsob: analyticky z impulsní charakteristiky

$$h(k)=\sum_{i=0}^{k}g(i)=\sum_{i=1}^{k}0,6^{i-1}-\sum_{i=1}^{k}(-0{,}4)^{i-1}=$$

$$=(0{,}6)^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k}0,6^{i}-1\right)+(0{,}4)^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k}(-0{,}4)^{i}-1\right)=$$

$$=(0{,}6)^{-1}\frac{1-(0{,}6)^{k+1}}{1-0{,}6}-(0{,}6)^{-1}+(0{,}4)^{-1}\frac{1-(-0{,}4)^{k+1}}{1+0{,}4}-(0{,}4)^{-1}=$$

$$=\frac{1-(0{,}6)^{k+1}}{0{,}24}+\frac{1-(-0{,}4)^{k+1}}{0{,}56}-\frac{1}{0{,}6}-\frac{1}{0{,}4}$$