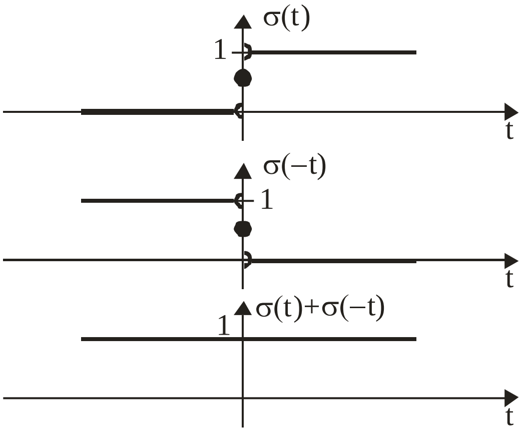
ISPP, Termín 3 25.1.2013	Jméno	ID

2. Je dán signál $f(t)=[\sigma(t)+\sigma(-t)]\cos 2\pi t, \quad t\in(-\infty,+\infty)$.

- **a)** Načrtněte průběh funkce $\sigma(t)+\sigma(-t)$. Předpokládejte, že $\sigma(0)=1/2$. (**3b**)
- **b)** Určete, zda je signál $f(t)$ periodický. Pokud je periodický, určete jeho periodu. (**3b**)
- **c)** Určete jeho komplexní spektrum. (**3b**)
- **d)** Načrtněte amplitudové (**3b**) a fázové spektrum (**3b**). Ocejchujte osy. **Celkem 15b**

Řešení:

a) Podle předpokladu je $\sigma(0)=1/2$, a proto $[\sigma(t)+\sigma(-t)]=1, \quad t\in(-\infty,+\infty)$.

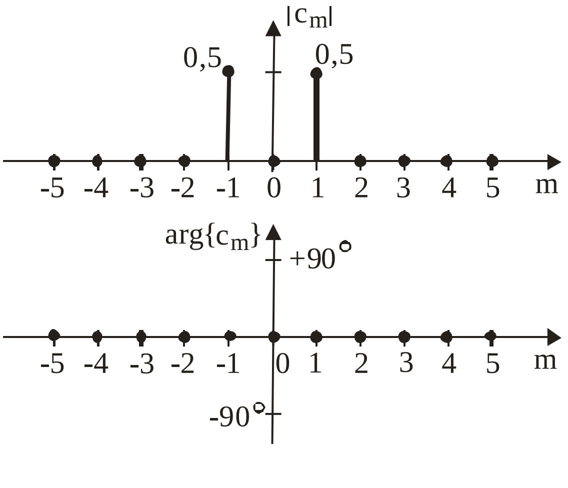


b) Jelikož $[\sigma(t)+\sigma(-t)]=1, \quad t\in(-\infty,+\infty)$ je $f(t)=\cos 2\pi t, \quad t\in(-\infty,+\infty)$. Signál je tedy periodický a platí $\omega_0=\dfrac{2\pi}{P}=2\pi \Rightarrow P=1[s]$

b) $f(t)=\cos 2\pi t=\dfrac{e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t}}{2}=0,5e^{-j2\pi t}+0,5e^{j2\pi t}$

$c_{-1}=+0,5 \quad c_{+1}=+0,5$ ostatní koeficienty jsou nulové.

c) $|c_{-1}|=|c_{+1}|=0,5$ $\qquad \arg\{c_{-1}\}=0^\circ \quad \arg\{c_{+1}\}=0^\circ$

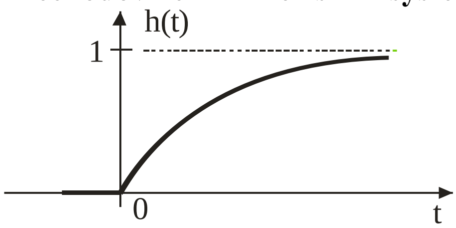


Příklad 2. Spojitý systém má přechodovou charakteristiku $h(t)=\begin{cases}\left(1-e^{-5t}\right) & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$. **(20b)**

a) Načrtněte přechodovou charakteristiku. Popište a ocejchujte osy. (**2b**)
b) Vypočtěte impulsovou charakteristiku a načrtněte ji. Popište a ocejchujte osy. (**3b**)
c) Vypočtěte operátorový přenos systému. **(5b)**
d) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. Rozhodněte o stabilitě systému. **(2b)**
e) Napište diferenciální rovnici systému (**3b**)
f) Načrtněte asymptotickou amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Popište a ocejchujte osy. (**5b**)

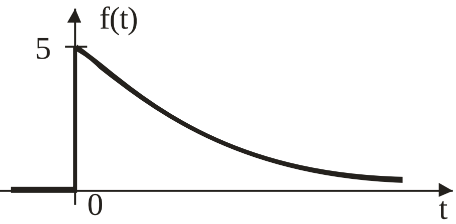
Řešení

a) Přechodová charakteristika systému:



b) Pro impulsovou charakteristiku platí:

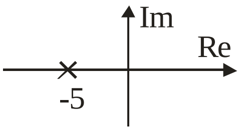
$$g(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(1-e^{-5t}\right)=\begin{cases}5e^{-5t} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



c) Pro operátorový přenos platí:

$$F(p)=\mathscr{L}\{g(t)\}=\mathscr{L}\left\{5e^{-5t}\right\}=5\mathscr{L}\left\{e^{-5t}\right\}=\frac{5}{p+5}=\frac{1}{0,2p+1}$$

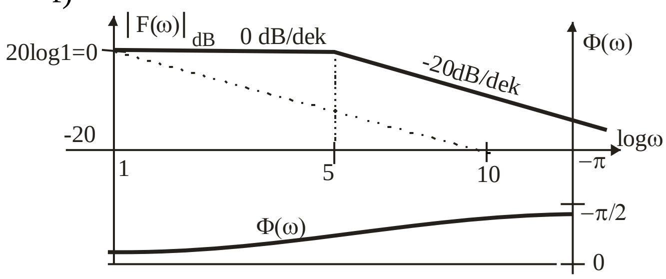
d) Systém nemá žádnou nulu a má jediný pól $p_1=-5$. Pól leží v levé polorovině- systém je stabilní



e) Pro diferenciální rovnici platí:

$$F(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{5}{p+5} \quad\Rightarrow\quad pY(p)+5Y(p)=5U(p) \quad\Rightarrow\quad y'(t)+5y(t)=5u(t)$$

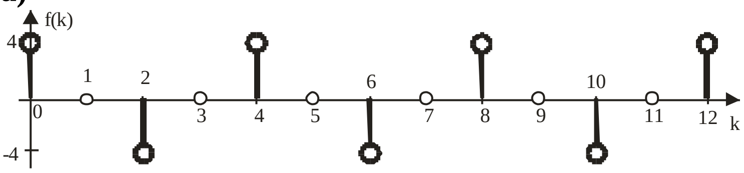
f)



3. Pro jednu periodu diskrétního periodického signálu s periodou $N = 4$ platí:
$f(k) = 4[\delta(k) - \delta(k-2)],\ k = 0,1,2,3$ kde $\delta(k)$ je jednotkový impuls. (**15b**)

a) Načrtněte hodnoty signálu pro $k = 0,1,2,...12$. Ocejchujte osy. (**3b**)
b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu. (**4b**)
c) Načrtněte amplitudové (**4b**) a fázové (**4b**) spektrum tohoto signálu. Ocejchujte osy.

Řešení
a)



b) Pro výpočet koeficientů diskrétní Fourierovy řady platí

$$c_m = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{-jm\frac{2\pi}{4}k} \qquad m = 0,1,2,3.$$ Jelikož $f(0) = 4,\ f(2) = -4,\ f(1) = f(3) = 0$ bude

$$c_m = \frac{1}{4} f(0) e^{-jm\frac{2\pi}{4}0} + \frac{1}{4} f(2) e^{-jm\frac{2\pi}{4}2} = \frac{1}{4} 4e^{-jm\frac{\pi}{2}0} - \frac{1}{4} 4e^{-jm\pi} = 1 - e^{-jm\pi} = 1 - (-1)^m \qquad m = 0,1,2,3$$

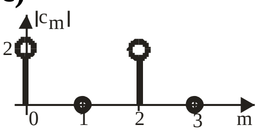
$c_0 = 1 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0 \qquad |c_0| = 0 \qquad \arg c_0 = 0$

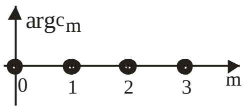
$c_1 = 1 - (-1)^1 = 1 + 1 = 2 \qquad |c_1| = 2 \qquad \arg c_1 = 0$

$c_2 = 1 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0 \qquad |c_2| = 0 \qquad \arg c_2 = 0$

$c_3 = 1 - (-1)^3 = 1 + 1 = 2 \qquad |c_3| = 2 \qquad \arg c_3 = 0$

c)





4. Diskrétní systém je popsán diferenční rovnicí $y(k)-0,5y(k-1)=2u(k-1)$. (**20b**)

a) Určete jeho operátorový přenos. (**2b**)

b) Načrtněte rozložení pólů a nul (**1b**). Popište osy (**1b**)

c) Rozhodněte o jeho stabilitě. (**1b**)

d) Vypočtěte (**4b**) a načrtněte (**3b**) jeho impulsní charakteristiku pro $k=0,1,2,3,4$.

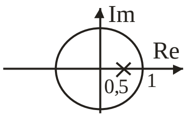
e) Vypočtěte (**5b**) a načrtněte (**3b**) jeho přechodovou charakteristiku pro $k=0,1,2,3,4$.

Řešení

a) Platí

$$y(k)-0,5y(k-1)=2u(k-1) \quad \Rightarrow \quad Y(z)\left[1-0,5z^{-1}\right]=2z^{-1}U(z) \quad \Rightarrow F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{2z^{-1}}{1-0,5z^{-1}}=\frac{2}{z-0,5}$$

b) Systém má jeden pól $z_1=+0,5$ a žádnou nulu.



c) Pól leží uvnitř jednotkové kružnice a proto je systém stabilní.

d) Způsob 1 – výpočet z operátorového přenosu. Platí

$$g(k)=\mathcal{Z}^{-1}\left[F(z)\right]=\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{2}{z-0,5}\right]=2\mathcal{Z}^{-1}\left[z^{-1}\frac{z}{z-0,5}\right]=\begin{cases}2(1/2)^{k-1} & k\geq 1\\ 0 & k<1\end{cases}$$

$$g(0)=0 \quad g(1)=2(1/2)^{1-1}=2 \quad g(2)=2(1/2)^{2-1}=1 \qquad .$$

$$g(3)=2(1/2)^{3-1}=1/2 \quad g(4)=2(1/2)^{4-1}=1/4$$

d) Způsob 2 – dělení polynomů

čitatel		jmenovatel		podíl				
z^1	z^0	z^1	z^0	z^0	z^(-1)	z(-2)	z^(-3)	z^(-4)
0	2	1	-0,5	0,000	2,000	1,000	0,500	0,250

0	0			
0	2			
	2	-1		
	0	1		
		1	-0,5	
		0	0,5	
			0,5	-0,25
			0	0,25

d) Způsob 3 – postupným řešením diferenční rovnice

$$y(k)=1/2y(k-1)+2u(k-1) \quad pro \quad u(k)=\delta(k)$$

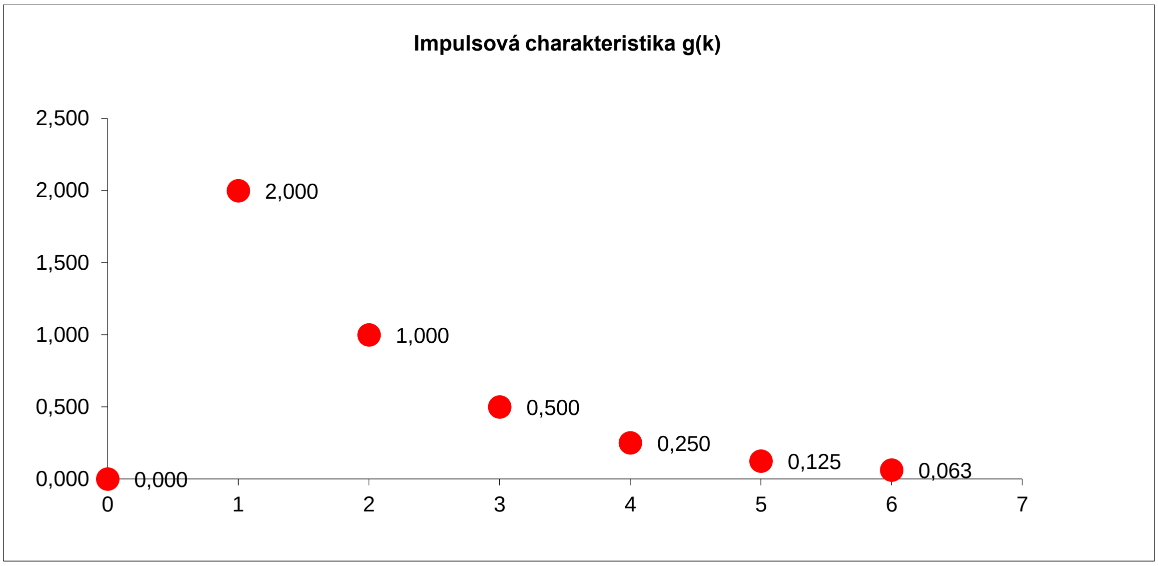
$$k=0 \quad y(0)=1/2y(0-1)+2u(0-1)=0+0=0$$

$$k=1 \quad y(1)=1/2y(1-1)+2u(1-1)=0+2=2$$

$$k=2 \quad y(2)=1/2y(2-1)+2u(2-1)=1+0=1$$

$$k=3 \quad y(3)=1/2y(3-1)+2u(3-1)=(1/2)(1)+0=1/2$$

$$k=4 \quad y(4)=1/2y(4-1)+2u(4-1)=(1/2)(1/2)+0=1/4$$



e) Platí

$$h(k)=\sum_{i=0}^{k} g(i)=\sum_{i=0}^{k-1} g(i)+g(k)=h(k-1)+g(k)$$

$$h(0)=g(0)=0$$

$$h(1)=h(0)+g(1)=0+1=2$$

$$h(2)=h(1)+g(2)=2+1=3$$

$$h(3)=h(2)+g(3)=3+1/2=3{,}5$$

$$h(4)=h(3)+g(4)=3{,}5-1/4=3{,}75$$