

1. Je dán signál $f(t) = 2 + \sin 2\pi t + \cos 6\pi t$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

a) Pokud je signál periodický určete základní periodu signálu. (3b)

b) Určete jeho komplexní spektrum. (5b)

c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum. Ocejchujte osy. (5b)

d) Jaká je hodnota stejnosměrné složky tohoto signálu. (1b)

e) Které harmonické složky tento signál obsahuje. (1b)

Celkem 15b

Řešení:

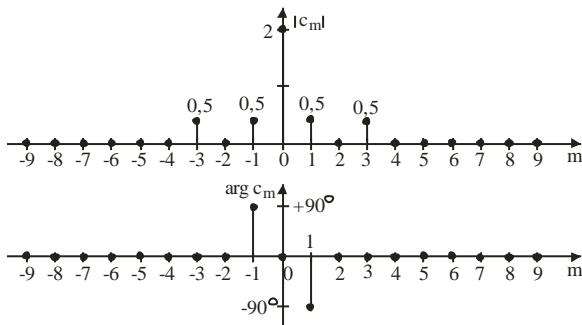
a) Signál je periodický, $\omega_0 = \frac{2\pi}{P} = 2\pi \Rightarrow P = 1[s]$

$$b) f(t) = 2 + \frac{e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}}{2j} + \frac{e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}}{2} = 0,5e^{-j6\pi t} + j0,5e^{-j2\pi t} + 2 - j0,5e^{j2\pi t} + 0,5e^{j6\pi t}$$

$c_0 = 2$ $c_{-1} = +j0,5$ $c_{+1} = -j0,5$ $c_{-3} = c_{+3} = 0,5$ ostatní koeficienty jsou nulové.

$$c) |c_0| = 2 \quad |c_{-1}| = |c_{+1}| = |c_{-3}| = |c_{+3}| = 0,5$$

$$\arg\{c_0\} = 0 \quad \arg\{c_{-1}\} = +90^\circ \quad \arg\{c_{+1}\} = -90^\circ \quad \arg\{c_{-3}\} = \arg\{c_{+3}\} = 0$$



d) Hodnota stejnosměrné složky je 2.

e) Signál obsahuje první a třetí harmonickou složku.

2. Diferenciální rovnice spojitého systému je $y'' + y' = u$.

a) Určete operátorový přenos systému. **(2b)**

b) Určete frekvenční přenos systému. **(2b)**

c) Načrtněte asymptotickou amplitudovou **(4b)** a fázovou **(4b)** frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Ocejdchujte osy.

d) Vypočtete **(4b)** a načrtněte **(4b)** impulsní charakteristiku systému.

Celkem 20b

Řešení:

a) $y''(t) + y'(t) = u(t) \quad / \mathcal{L} \Rightarrow p^2 Y(p) + pY(p) = U(p) \Rightarrow F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p(p+1)}$

b) $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \arctan \omega\right)}$

c) Pro absolutní hodnotu platí:

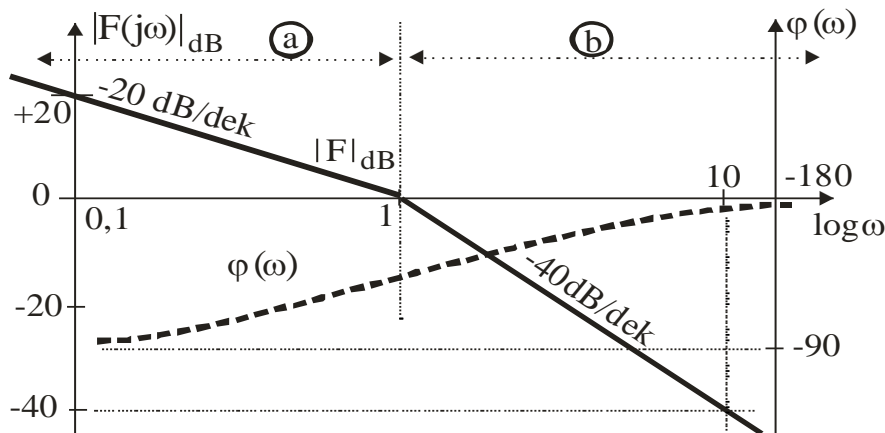
$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log |F(j\omega)| = 20 \log 1 - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 1} = -20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 1}$$

Na charakteristice je jeden zlomový bod $\omega = 1$ a v jednotlivých oblastech platí:

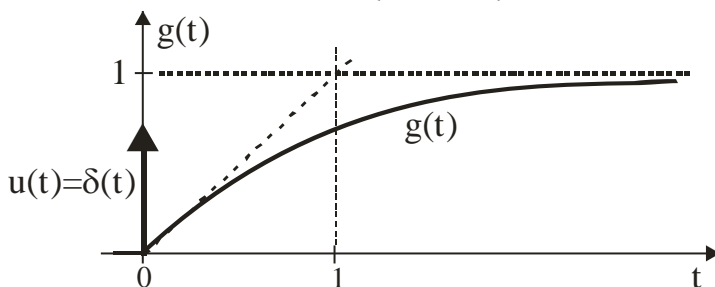
Oblast a: $\omega \ll 1 \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} \approx -20 \log \omega$

Oblast b: $\omega \gg 1 \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} \approx -20 \log \omega - 20 \log \omega = -40 \log \omega$.

Pro fázi platí $\varphi(\omega) = -\pi/2 - \arctan \omega$.



d) $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p(p+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right\} = 1 - e^{-t} \quad \text{pro } t > 0$



3. Je dán diskretní signál $f(k) = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $k \in (-\infty, +\infty)$ kde k je pořadové číslo vzorku.

a) Ukažte, že tato posloupnost je periodická s periodou N (**5b**)

b) Určete výkon tohoto signálu (**5b**).

c) Načrtněte jednu periodu reálné a imaginární části tohoto signálu pro $N = 4$ (**5b**).

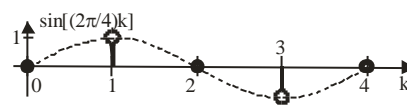
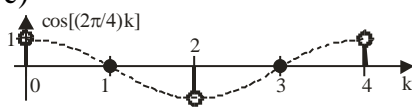
Celkem (**15b**)

Řešení

$$a) f(k+N) = Ae^{j\frac{2\pi}{N}(k+N)} = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{j\frac{2\pi}{N}N} = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{j2\pi} = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k} = f(k)$$

$$b) P_w = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |f(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| Ae^{j\frac{2\pi}{N}k} \right|^2 = \frac{A^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| e^{j\frac{2\pi}{N}k} \right|^2 = \frac{A^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 = \frac{A^2}{N} N = A^2$$

c)



4. Diskrétní systém je popsán svojí přechodovou charakteristikou $h(k) = k, k = 0, 1, 2, \dots$

a) Načrtněte přechodovou charakteristiku pro $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Ocejchujte osy. (4b)

b) Určete impulsovou charakteristiku systému pro $k \in \langle 0, \infty \rangle$ a načrtněte ji pro $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Ocejchujte osy. (5b)

c) Určete operátorový přenos systému. (5b)

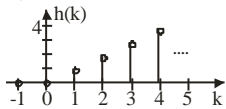
d) Napište diferenční rovnici systému. (4b)

e) Načrtněte rozložení pólů a nul a rozhodněte o stabilitě systému. (2b)

Celkem 20b

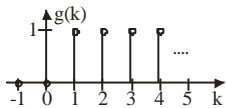
Řešení:

a) Přechodová charakteristika:



b) Pro impulsovou charakteristiku platí:

$$g(0) = h(0) = 0, \quad g(k) = h(k) - h(k-1) = k - (k-1) = 1 \quad k = 1, 2, \dots \Rightarrow g(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 1 & k > 0 \end{cases}$$



c) $F(z) = \mathcal{Z}\{g(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} - 1 = \frac{1}{1-z^{-1}} - 1 = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z-1}$

d) $F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \Rightarrow Y(z)(1-z^{-1}) = U(z)z^{-1} \Rightarrow y(k) - y(k-1) = u(k-1)$

e) Systém má jeden pól $z_1 = 1$ který leží na jednotkové kružnici a proto je systém na mezi stability.

