B/KSAS- termín 3, 24.1.2013	Jméno	ID

1. Je dán spojitý signál $f\left(t\right)=\left|\sin \omega t\right|, \quad \omega =2\pi /P$ **(15b)**

a) Načrtněte časový průběh signálu pro $t\left\langle -2P,+2P\right\rangle$. **(3b)**

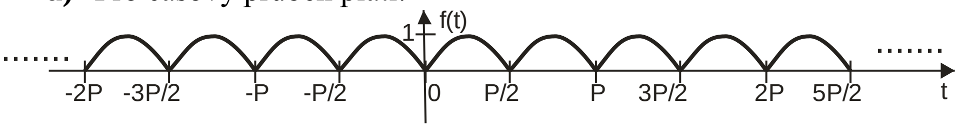
b) Určete, zda je periodický- pokud ano, určete jeho **základní** periodu. (**2b**).

c) Vypočtěte spektrum signálu **(6b)**

d) Načrtněte amplitudové (**2b**) a fázové spektrum (**2b**) pro $m=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3$.

Řešení

a) Pro časový průběh platí:



b) Signál je periodický s periodou $P/2 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 =\dfrac{2\pi }{P/2}=4\pi /P=2\omega$.

c) Pro interval $t\in \left\langle 0,P/2\right\rangle$ platí $f\left(t\right)=\left|\sin \omega t\right|=\sin \omega_0 t/2$. Pro spektrum platí:

$$c_m=\frac{1}{P/2}\int_0^{P/2}\sin\left(\omega_0 t/2\right)e^{-jm\omega_0 t}dt=\frac{2}{P}\int_0^{P/2}\frac{e^{j\omega_0 t/2}-e^{-j\omega_0 t/2}}{2j}e^{-jm\omega_0 t}dt=$$

$$=\frac{-j}{P}\left\{\int_0^{P/2}e^{j\omega_0 t/2}e^{-jm\omega_0 t}dt-\int_0^{P/2}e^{-j\omega_0 t/2}e^{-jm\omega_0 t}dt\right\}=\frac{-j}{P}\left\{\int_0^{P/2}e^{j\omega_0 t\left(1/2-m\right)}dt-\int_0^{P/2}e^{-j\omega_0 t\left(1/2+m\right)}dt\right\}=$$

$$=\frac{-j}{P}\left\{\left[\frac{e^{j\omega_0 t\left(1/2-m\right)}}{j\omega_0\left(1/2-m\right)}\right]_0^{P/2}-\left[\frac{e^{-j\omega_0 t\left(1/2+m\right)}}{-j\omega_0\left(1/2+m\right)}\right]_0^{P/2}\right\}=\frac{-1}{P}\left\{\frac{e^{j\omega_0\frac{P}{2}\left(1/2-m\right)}-1}{\omega_0\left(1/2-m\right)}+\frac{e^{-j\omega_0\frac{P}{2}\left(1/2+m\right)}-1}{\omega_0\left(1/2+m\right)}\right\}=$$ d)

$$=\frac{-1}{P}\left\{\frac{e^{j2\pi\left(1/2-m\right)}-1}{\omega_0\left(1/2-m\right)}+\frac{e^{-j2\pi\left(1/2+m\right)}-1}{\omega_0\left(1/2+m\right)}\right\}=\frac{-1}{P}\left\{\frac{e^{j\pi}e^{-j2m\pi}-1}{\omega_0\left(1/2-m\right)}+\frac{e^{-j\pi}e^{-j2m\pi}-1}{\omega_0\left(1/2+m\right)}\right\}=$$

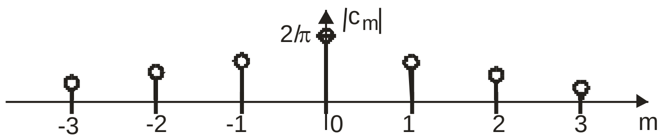
$$=\frac{-1}{P}\left\{\frac{-1-1}{\omega_0\left(1/2-m\right)}+\frac{-1-1}{\omega_0\left(1/2+m\right)}\right\}=\frac{2}{\omega_0 P}\frac{1/2+m+1/2-m}{\left(1/2-m\right)\left(1/2+m\right)}=-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{m^2-1/4}=-\frac{1}{\pi}\frac{2}{4m^2-1}$$

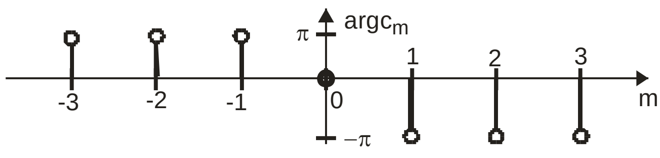
$c_0=2/\pi \qquad \left|c_0\right|=2/\pi \quad \arg c_0=0$

$c_1=-2/\left(3\pi\right) \quad \left|c_1\right|=2/\left(3\pi\right) \quad \arg c_1=\pm\pi \qquad c_{-1}=-2/\left(3\pi\right) \quad \left|c_{-1}\right|=2/\left(3\pi\right) \quad \arg c_{-1}=\pm\pi$

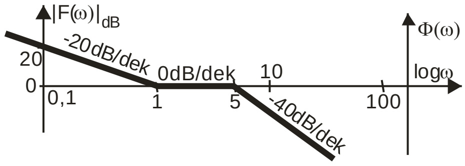
$c_2=-2/\left(15\pi\right) \quad \left|c_2\right|=2/\left(15\pi\right) \quad \arg c_2=\pm\pi \qquad c_{-2}=-2/\left(15\pi\right) \quad \left|c_{-2}\right|=2/\left(15\pi\right) \quad \arg c_{-2}=\pm\pi$

$c_3=-2/\left(35\pi\right) \quad \left|c_3\right|=2/\left(35\pi\right) \quad \arg c_3=\pm\pi \qquad c_{-3}=-2/\left(35\pi\right) \quad \left|c_{-3}\right|=2/\left(35\pi\right) \quad \arg c_{-3}=\pm\pi$





2. Spojitý systém má asymptotickou amplitudovou frekvenční charakteristiku uvedenou na obrázku a pro jeho fázovou frekvenční charakteristiku platí $\lim_{\omega\to\infty}\Phi(\omega) > -\infty$. **(20b)**



a) Určete operátorový přenos systému (**7b**)
b) Napište diferenciální rovnici systému (**2b**)
c) Načrtněte rozložení pólů a nul tohoto systému. Popište osy. (**4b**)
d) Načrtněte fázovou charakteristiku tohoto systému (**7b**)

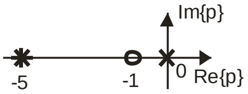
Řešení:

a) Vzhledem k tomu, že $\lim_{\omega\to\infty}\Phi(\omega) > -\infty$ jedná se o systém bez dopravního zpoždění a operátorový přenos má tedy tvar $F(p) = \dfrac{K(T_1 p+1)}{p(T_2 p+1)^2}$ kde pro konstantu K platí $20\log\dfrac{K}{\omega}\bigg|_{\omega=1} = 20\log K = 0dB \;\Rightarrow\; K=1$ a

dále platí $\dfrac{1}{T_1} = 1 \Rightarrow T_1 = 1,\quad \dfrac{1}{T_2} = 5 \Rightarrow T_2 = 0,2 \quad\Rightarrow\quad F(p) = \dfrac{(p+1)}{p(0,2p+1)^2}$

b)
$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{(p+1)}{p(0,2p+1)^2} \Rightarrow Y(p)\,p(0,2p+1)^2 = U(p)(p+1) \quad\Rightarrow$$
$$Y(p)\,p\left(0,04p^2+0,4p+1\right) = U(p)(p+1) \quad\Rightarrow\quad 0,04y'''(t)+0,4y''(t)+y'(t) = u'(t)+u(t)$$

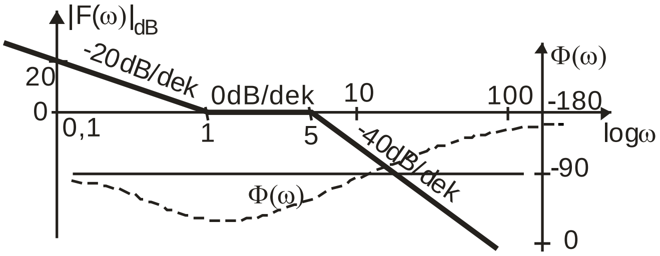
c) Systém má tři póly $p_1 = 0;\ p_{2,3} = -1/0,2 = -5$ a jednu nulu $n_1 = -1$



d) Pro fázovou charakteristiku platí $\Phi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2} + arctg\,\omega - 2arctg\,0,2\omega$. Platí

$$\Phi(0) = -\frac{\pi}{2}+0-0 = -\frac{\pi}{2},\quad \Phi(\infty) = -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-2\frac{\pi}{2} = -\pi$$ a pro extrém platí

$$\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(-\frac{\pi}{2}+arctg\,\omega-2arctg\,0,2\omega\right) = \frac{1}{1+\omega^2} - 2\frac{0,2}{1+0,04\omega^2} =$$
$$= \frac{1+0,04\omega^2-0,4-0,4\omega^2}{\left(1+\omega^2\right)\left(1+0,04\omega^2\right)} \quad\Rightarrow\quad 0,6-0,36\omega^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{0,6}{0,36}} = \sqrt{\frac{60}{36}} = \frac{2\sqrt{15}}{6} \doteq \frac{4}{3} = 1,3$$



3. Pro hodnoty periodické posloupnosti s periodou $N = 4$ platí $f(0) = 2;\ f(1) = 1;\ f(2) = 0;\ f(3) = 1$. (**15b**)

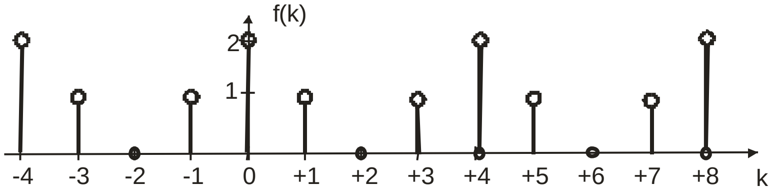
a) Načrtněte hodnoty tohoto signálu pro $k \in \langle -4, +8 \rangle$ (**4b**)

b) Vypočítejte jeho spektrum (**5b**)

c) Načrtněte amplitudové (**3b**) a fázové (**3b**) spektrum pro $m = 0,1,2,3$. Ocejchujte osy!

Řešení

a) Hodnoty signálu



b) Pro spektrum platí

$$c_m = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{4}k} = f(0)e^{-jm\frac{2\pi}{4}0} + f(1)e^{-jm\frac{2\pi}{4}1} + f(2)e^{-jm\frac{2\pi}{4}2} + f(3)e^{-jm\frac{2\pi}{4}3} = \frac{1}{4}\left(2 + e^{-jm\frac{2\pi}{4}1} + e^{-jm\frac{2\pi}{4}3}\right)$$

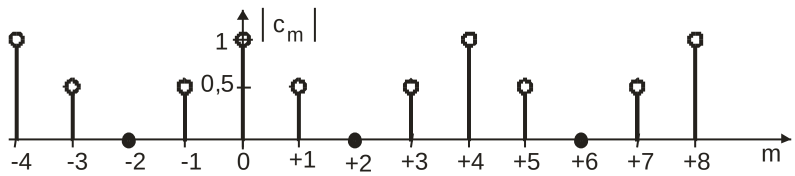
$$c_0 = \frac{1}{4}\left(2 + e^{-j0\frac{2\pi}{4}1} + e^{-j0\frac{2\pi}{4}3}\right) = \frac{1}{4}(2+1+1) = 1 \quad |c_0| = 1 \quad \arg c_0 = 0$$

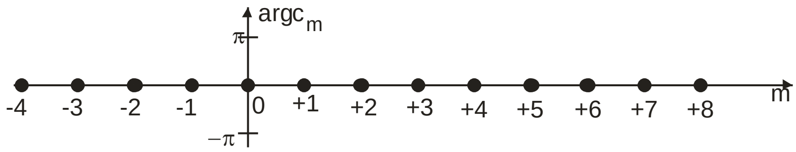
$$c_1 = \frac{1}{4}\left(2 + e^{-j1\frac{2\pi}{4}1} + e^{-j1\frac{2\pi}{4}3}\right) = \frac{1}{4}\left(2 + e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\frac{3\pi}{2}}\right) = \frac{1}{4}(2 - j + j) = 0{,}5 \quad |c_1| = 0{,}5 \quad \arg c_1 = 0$$

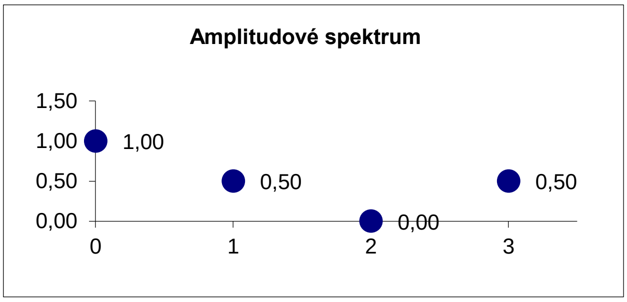
$$c_2 = \frac{1}{4}\left(2 + e^{-j2\frac{2\pi}{4}1} + e^{-j2\frac{2\pi}{4}3}\right) = \frac{1}{4}\left(2 + e^{-j\pi} + e^{-j3\pi}\right) = \frac{1}{4}(2-1-1) = 0 \quad |c_2| = 0 \quad \arg c_2 = 0$$

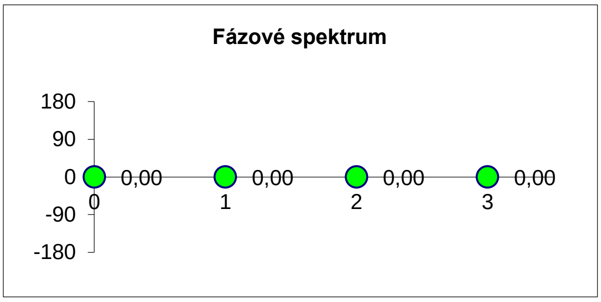
$$c_3 = \frac{1}{4}\left(2 + e^{-jm\frac{2\pi}{4}1} + e^{-jm\frac{2\pi}{4}3}\right) = \frac{1}{4}\left(2 + e^{-j\frac{3\pi}{2}} + e^{-j\frac{9\pi}{2}}\right) = \frac{1}{4}(2 + j - j) = 0{,}5 \quad |c_1| = 0{,}5 \quad \arg c_1 = 0$$

c) Amplitudové a fázové spektrum

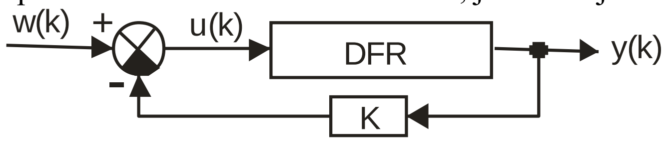








4. Diskrétní systém popsaný diferenční rovnicí DFR: $y(k)-2y(k-1)=u(k-1)$ je obepnut zápornou zpětnou vazbou se zesílením K tak, jak ukazuje obrázek. (**20b**)



a) Určete stabilitu systému popsaného zadanou DFR. (**2b**)

b) Určete rozsah zesílení $K \in (K_{\min}, K_{\max})$ tak, aby celý systém byl stabilní. (**5b**)

c) Zvolte $K=(K_{\min}+K_{\max})/2$ a vypočtěte operátorový přenos celého systému. Slovně popište činnost celého systému. (**3b**)

d) Pro takto zvolené K načrtněte impulsovou charakteristiku pro $k=0,1,2,3,4.$ (**5b**)

e) Pro takto zvolené K načrtněte přechodovou charakteristiku pro $k=0,1,2,3,4.$ (**5b**)

Řešení

a) Pro operátorový přenos systému popsaného danou DFR platí:

$$y(k)-2y(k-1)=u(k-1) \quad \Rightarrow \quad Y(z)-2z^{-1}Y(z)=z^{-1}U(z)$$

$$F_{DFR}(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}=\frac{1}{z-2}$$

Pól $z_1=2$ leží mimo jednotkovou kružnici- systém popsaný DFR je nestabilní.

b) Pro celkový přenos systému platí:

$$F(z)=\frac{F_{DFR}(z)}{1+KF_{DFR}(z)}=\frac{\frac{1}{z-2}}{1+\frac{K}{z-2}}=\frac{1}{z-2+K}=\frac{1}{z+(K-2)}$$

Tento operátorový přenos má jediný pól $z_1=K-2$. Podmínka stability:

$$|z_1|<1 \quad \Rightarrow \quad |K-2|<1 \quad \Rightarrow \quad K\in(1,3)$$

c) Zvolíme $K=(K_{\min}+K_{\max})/2=(1+3)/2=2$. Operátorový přenos celého systému bude $F(z)=z^{-1}$. Celý systém bude zpožďovat o jeden krok.

d) +e) Impulsová a přechodová charakteristika systému.