B/KSAS termín2, 18.1.2013	Jméno	ID

1. Je dáno spektrum spojitého periodického signálu

$$c_m = \begin{cases} \dfrac{-jm/|m|}{|m|+1} & m = -3, -1, +1, +3 \\ 0 & m \neq -3, -1, +1, +3 \end{cases}$$

(15b)

a) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum pro $m \in \langle -4, +4 \rangle$ (**4b**)

b) Určete časový průběh signálu **(4b)** a načrtněte jeho jednu periodu **(4b)**

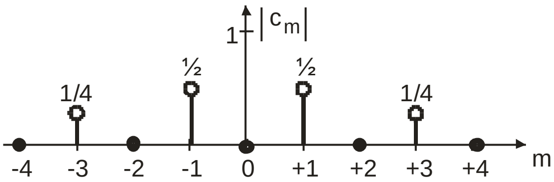
c) Vypočtěte výkon signálu (**3b**)

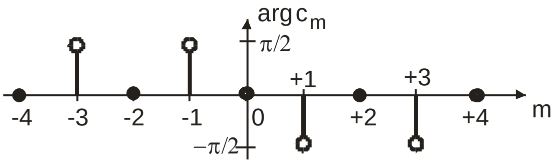
Řešení

a) Pro spektrum platí:

$$c_{-3} = \frac{-j(-3)/|-3|}{|-3|+1} = \frac{j}{4} \quad |c_{-3}| = \frac{1}{4} \quad \arg c_{-3} = +\pi/2 \qquad c_{+3} = \frac{-j(+3)/|+3|}{|+3|+1} = \frac{-j}{4} \quad |c_{+3}| = \frac{1}{4} \quad \arg c_{+3} = -\pi/2$$

$$c_{-1} = \frac{-j(-1)/|-1|}{|-1|+1} = \frac{j}{2} \quad |c_{-1}| = \frac{1}{2} \quad \arg c_{-1} = +\pi/2 \qquad c_{+1} = \frac{-j(+1)/|+1|}{|+1|+1} = \frac{-j}{2} \quad |c_{+1}| = \frac{1}{2} \quad \arg c_{+1} = -\pi/2$$

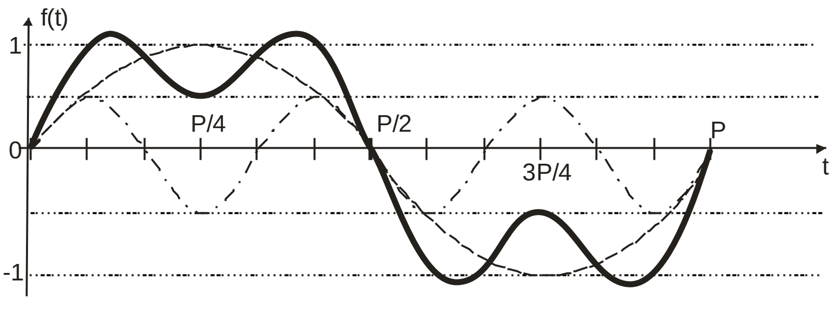




b) Pro časový průběh platí:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{jm\omega_0 t} = c_{-3} e^{-j3\omega_0 t} + c_{-1} e^{-j1\omega_0 t} + c_1 e^{j1\omega_0 t} + c_3 e^{j3\omega_0 t} = \frac{j}{4} e^{-j3\omega_0 t} + \frac{j}{2} e^{-j1\omega_0 t} - \frac{j}{2} e^{j1\omega_0 t} - \frac{j}{4} e^{j3\omega_0 t} =$$

$$= -\frac{1}{4j} e^{j3\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j1\omega_0 t} + \frac{1}{2j} e^{j1\omega_0 t} + \frac{1}{4j} e^{j3\omega_0 t} = \frac{e^{j1\omega_0 t} - e^{-j1\omega_0 t}}{2j} + \frac{e^{j3\omega_0 t} - e^{j3\omega_0 t}}{4j} = \sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin 3\omega_0 t$$



c) Pro výkon signálu v kmitočtové oblasti platí:

$$P_W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2 = |c_{-3}|^2 + |c_{-1}|^2 + |c_1|^2 + |c_3|^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{1+4+4+1}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

2. Spojitý systém má jeden dvojnásobný pól $p_{1,2} = -1$ a jednu nulu $n_1 = 0$ a na kmitočtu $\omega = 1[rad/\sec]$ má tento systém zesílení rovno 5. (**20b**)

a) Určete operátorový přenos systému (**6b**)
b) Napište diferenciální rovnici systému (**2b**)
c) Načrtněte asymptotickou amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích (**6b**)
d) Do obrázku dokreslete skutečnou amplitudovou frekvenční charakteristiku. Určete největší odchylku mezi asymptotickou a skutečnou amplitudovou frekvenční charakteristikou a vyznačte ji v obrázku. Pomůcka: $\log 2 \doteq 0,3$ (**6b**)

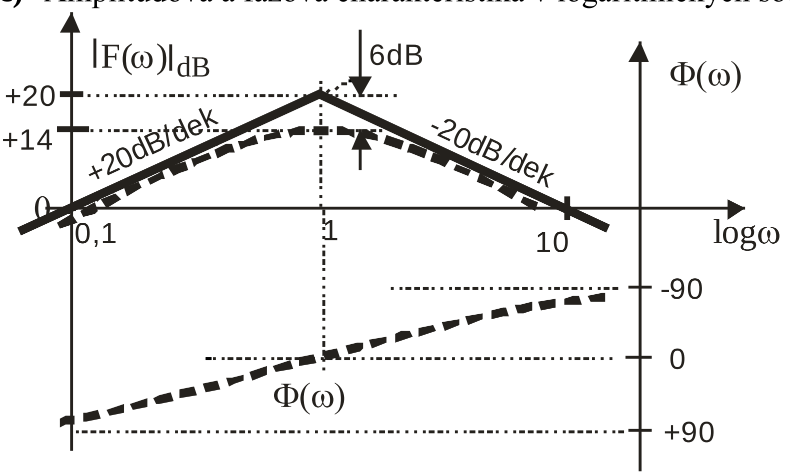
a) Pro operátorový přenos systému platí na základě zadaných pólů a nul:

$F(p) = \dfrac{Kp}{(p+1)^2}$ kde K je zatím neznámé zesílení systému, které určíme z frekvenčního přenosu na kmitočtu 1 rad/sec. Platí: $\left|F(j\omega)\right|_{\omega=1} = \left|\dfrac{Kj\omega}{(j\omega+1)^2}\right|_{\omega=1} = \left[\dfrac{K\omega}{\omega^2+1}\right]_{\omega=1} = \dfrac{K}{2} \overset{!}{=} 5 \Rightarrow K = 10$

Takže pro operátorový přenos systému platí $F(p) = \dfrac{10p}{(p+1)^2} = \dfrac{10p}{p^2+2p+1}$

b) Diferenciální rovnice: $y'' + 2y' + y = 10u'$

c) Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích



d) Největší chyba nastává pro $\omega = 1$. Pro skutečnou amplitudovou charakteristiku platí:

$\left|F_{skut}(\omega)\right|_{dB} = 20\log\left|F(\omega)\right| = 20\log\dfrac{10\omega}{\omega^2+1} = 20\log 10 + 20\log\omega - 20\log\left(\omega^2+1\right)$

Při kmitočtu $\omega = 1$ bude její hodnota

$\left|F_{skut}(\omega=1)\right|_{dB} = 20\log 10 + 20\log 1 - 20\log(1+1) = 20\log 10 - 20\log 2$

Pro asymptotickou amplitudovou charakteristiku při kmitočtu $\omega \le 1$ platí:

$\left|F_{asym}(\omega)\right|_{dB} = 20\log 10 + 20\log\omega$ a pro $\omega = 1$ bude její hodnota $\left|F_{asym}(\omega=1)\right|_{dB} = 20\log 10$. Pro největší chybu potom platí:

$\Delta F = \left|F_{asym}(\omega=1)\right|_{dB} - \left|F_{skut}(\omega=1)\right|_{dB} = 20\log 10 - (20\log 10 - 20\log 2) = 20\log 2 = 20\times 0,3 = 6dB$

3. Pro hodnoty konečné neperiodické posloupnosti s délkou $N=4$ platí $f(0)=0;\ f(1)=1;\ f(2)=2;\ f(3)=1$. (**15b**)

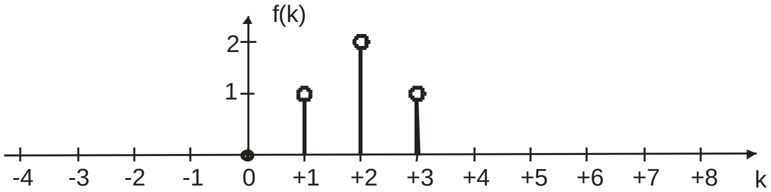
a) Načrtněte hodnoty tohoto signálu pro $k\in\langle -4,+8\rangle$ (**4b**)

b) Vypočítejte jeho spektrum (**5b**)

c) Načrtněte amplitudové (**3b**) a fázové (**3b**) spektrum pro $m=0,1,2,3$. Ocejchujte osy!

Řešení

a) Hodnoty signálu



b) Pro spektrum platí

$$F(m)=\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{4}k} = f(0)e^{-jm\frac{2\pi}{4}0} + f(1)e^{-jm\frac{2\pi}{4}1} + f(2)e^{-jm\frac{2\pi}{4}2} + f(3)e^{-jm\frac{2\pi}{4}3} =$$

$$= e^{-jm\frac{2\pi}{4}1} + 2e^{-jm\frac{2\pi}{4}2} + e^{-jm\frac{2\pi}{4}3}$$

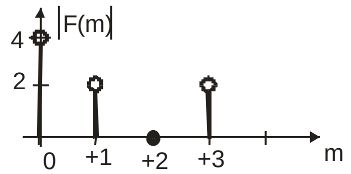
$$F(0)=e^{-j0\frac{2\pi}{4}1} + 2e^{-j0\frac{2\pi}{4}2} + e^{-j0\frac{2\pi}{4}3} = 1+2+1=4$$

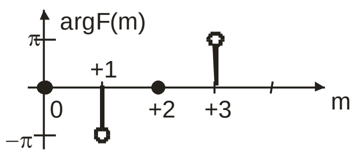
$$F(1)=e^{-j1\frac{2\pi}{4}1} + 2e^{-j1\frac{2\pi}{4}2} + e^{-j1\frac{2\pi}{4}3} = e^{-j\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j\pi} + e^{-j\frac{3\pi}{2}} = -j-2+j=-2 \quad |F(1)|=2, \arg F(1)=\pm\pi$$

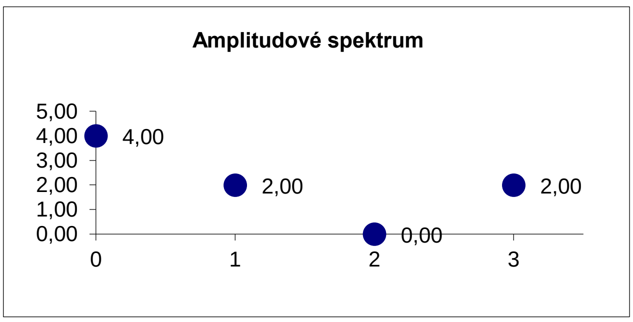
$$F(2)=e^{-j2\frac{2\pi}{4}1} + 2e^{-j2\frac{2\pi}{4}2} + e^{-j2\frac{2\pi}{4}3} = e^{-j\pi} + 2e^{-j2\pi} + e^{-j3\pi} = -1+2-1=0 \quad |F(2)|=0, \arg F(2)=0$$

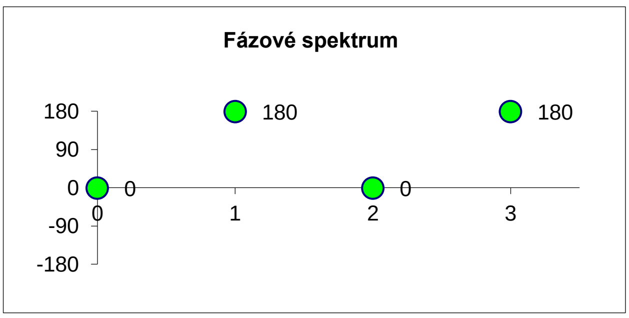
$$F(3)=e^{-j3\frac{2\pi}{4}1} + 2e^{-j3\frac{2\pi}{4}2} + e^{-j3\frac{2\pi}{4}3} = e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 2e^{-j3\pi} + e^{-j\frac{9\pi}{2}} = +j-2-j=-2 \quad |F(3)|=2, \arg F(3)=\pm\pi$$

c) Amplitudové a fázové spektrum

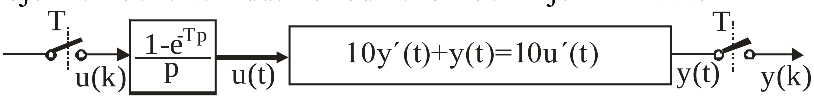








4. Spojitý systém je popsán diferenciální rovnicí $10y'(t)+y(t)=10u'(t)$. Na vstupu tohoto systému je připojen tvarovač 0. řádu. Perioda vzorkování je $T=1\text{sec}$.



(20b)

a) Vypočtěte operátorový přenos spojitého systému (**2b**)
b) Vypočtěte přechodovou charakteristiku spojitého systému (**3b**)
c) Vzorkujte přechodovou charakteristiku s periodou *T*. (**3b**)
d) Určete ekvivalentní Z přenos diskretizovaného systému (**5b**)
e) Vypočtěte přechodovou charakteristiku diskretizovaného systému pro $k=0,1,2,3,4$. (**7b**)

Řešení:

a) Platí

$$10pY(p)+Y(p)=10pU(p) \quad\Rightarrow\quad F(p)=\frac{10p}{10p+1}$$

b) Platí

$$H(p)=\frac{1}{p}F(p)=\frac{10}{(10p+1)}=\frac{1}{(p+1/10)} \quad\Rightarrow\quad h(t)=e^{-\frac{t}{10}}$$

c) Při vzorkování platí $t=kT=k$ a tedy $h(k)=e^{-\frac{k}{10}}$

d) Pro ekvivalentní přenos platí

$$F_e(z)=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\{h(k)\}=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\{(e^{-0,1})^k\}=\frac{z-1}{z}\frac{z}{z-e^{-0,1}}=\frac{z-1}{z-e^{-0,1}}$$

e) Pro diferenční rovnici diskretizovaného systému a jeho přechodovou charakteristiku platí

$$F_e(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z-1}{z-e^{-0,1}}=\frac{1-z^{-1}}{1-e^{-0,1}z^{-1}} \quad\Rightarrow\quad Y(z)(1-e^{-0,1}z^{-1})=U(z)(1-z^{-1}) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(k)-e^{-0,1}y(k-1)=u(k)-u(k-1) \Rightarrow y(k)=e^{-0,1}y(k-1)+u(k)-u(k-1)$$

$$k=0 \quad y(0)=e^{-0,1}y(0-1)+u(0)-u(0-1)=e^{-0,1}0+1-0=1$$

$$k=1 \quad y(1)=e^{-0,1}y(1-1)+u(1)-u(1-1)=e^{-0,1}1+1-1=e^{-0,1}$$

$$k=2 \quad y(2)=e^{-0,1}y(2-1)+u(2)-u(2-1)=e^{-0,1}e^{-0,1}+1-1=e^{-0,2}$$

$$k=3 \quad y(3)=e^{-0,1}y(3-1)+u(3)-u(3-1)=e^{-0,1}e^{-0,2}+1-1=e^{-0,3}$$

$$k=4 \quad y(4)=e^{-0,1}y(4-1)+u(4)-u(4-1)=e^{-0,1}e^{-0,3}+1-1=e^{-0,4}$$

Jiné řešení

$$H(z)=\mathcal{Z}\{\sigma(k)\}F_e(z)=\frac{z}{z-1}\frac{z-1}{z-e^{-0,1}}=\frac{z}{z-e^{-0,1}}=\frac{1}{1-e^{-0,1}z^{-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-0,1}z^{-1})^k=$$

$$=1z^0+e^{-0,1}z^{-1}+e^{-0,2}z^{-2}+e^{-0,3}z^{-3}+e^{-0,4}z^{-4}+\ldots \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(0)=1, h(1)=e^{-0,1}, h(2)=e^{-0,2}, h(3)=e^{-0,3}, h(4)=e^{-0,4},\ldots$$