B/KSAS- termín 1, sk.B, 7.1.2013	Jméno	ID

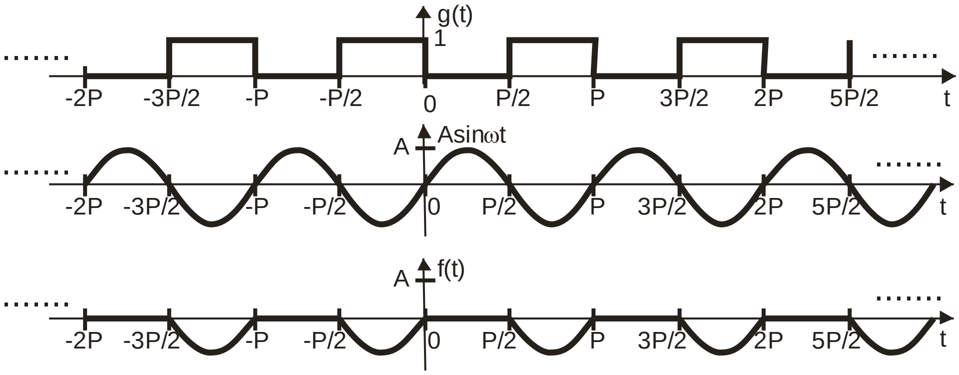
1. Je dán spojitý signál

$$f\left(t\right)=A\left\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[\sigma\left(t+P/2+iP\right)-\sigma\left(t+iP\right)\right]\right\}\sin\omega t,\quad \omega=2\pi/P,\quad A,P>0 \quad \mathbf{(15b)}$$

a) Načrtněte časový průběh signálu **(5b)**
b) Určete, zda je periodický- pokud ano, určete jeho periodu. (**2b**).
c) Vypočtěte stejnosměrnou složku signálu. **(5b)**
d) Vypočtěte výkon signálu (**3b**)

Řešení

a) $f\left(t\right)=A\sin\omega t\left[g\left(t\right)\right],\quad kde\quad g\left(t\right)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[\sigma\left(t+P/2+iP\right)-\sigma\left(t+iP\right)\right]$



b) Signál je periodický s periodou P.
c) Stejnosměrná složka je rovna koeficientu spektra c_0.

$$c_0=\frac{1}{P}\int_0^P f\left(t\right)dt=\frac{1}{P}\int_{P/2}^{P}A\sin\omega t dt=\frac{A}{P}\left[\frac{-\cos\omega t}{\omega}\right]_{P/2}^{P}=-\frac{A}{P\omega}\left[\cos\omega P-\cos\omega P/2\right]=$$

$$=-\frac{A}{2\pi}\left[\cos 2\pi-\cos\pi\right]=-\frac{A}{2\pi}\left[1+1\right]=-\frac{A}{\pi}$$

d) Pro výkon signálu platí:

$$P_W=\frac{1}{P}\int_0^P\left|f\left(t\right)\right|^2dt=\frac{A^2}{P}\int_{P/2}^{P}\sin^2\omega t dt=\frac{A^2}{P}\int_{P/2}^{P}\left(\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right)^2dt=\frac{A^2}{-4P}\int_{P/2}^{P}\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right)^2dt=$$

$$=\frac{A^2}{-4P}\int_{P/2}^{P}\left(e^{2j\omega t}-2e^{2j\omega t}e^{-2j\omega t}+e^{-2j\omega t}\right)dt==\frac{A^2}{-4P}\int_{P/2}^{P}\left(2\cos 2\omega t-2\right)dt=\frac{A^2}{2P}\int_{P/2}^{P}\left(1-\cos 2\omega t\right)dt=$$

$$=\frac{A^2}{2P}\left\{\left[t\right]_{P/2}^{P}-\left[\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_{P/2}^{P}\right\}=\frac{A^2}{2P}\left\{\frac{P}{2}-\frac{\sin 2\omega P}{2\omega}-\frac{\sin\omega P}{2\omega}\right\}=\frac{A^2}{2P}\left\{\frac{P}{2}-\frac{\sin 4\pi}{2\omega}-\frac{\sin 2\pi}{2\omega}\right\}=\frac{A^2}{4}$$

2. Spojitý systém má impulsovou charakteristiku $g(t)=\begin{cases}5\left(e^{-t/4}-e^{-t/2}\right) & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ (**20b**)

a) Načrtněte tuto charakteristiku (**4b**). Popište a ocejchujte osy. (**2b**)
b) Určete operátorový přenos systému. (**4b**)
c) Vypočtěte a načrtněte přechodovou charakteristiku $h(t)$ (**4b**). Popište a ocejchujte osy (**2b**)
d) Na vstupu systému působí signál $u(t)=2\sigma(t)$. Určete ustálenou hodnotu výstupu systému. (**4b**)

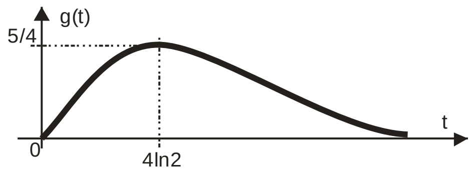
Řešení:

a) Impulsová charakteristika: $g(0)=0,\ g(\infty)=0$. Pro extrémy platí:

$$g'(t)=5\left(-\frac{1}{4}e^{-t/4}+\frac{1}{2}e^{-t/2}\right)=0\Rightarrow\ \frac{1}{2}e^{-t/2}=\frac{1}{4}e^{-t/4}\Rightarrow\ 2=e^{+t/2}e^{-t/4}=e^{+t/4}\Rightarrow\ t=4\ln 2$$

Pro hodnotu v extrémním bodě platí:

$$g(t=4\ln 2)=5\left(e^{-\frac{4\ln 2}{4}}-e^{-\frac{4\ln 2}{2}}\right)=5\left(e^{-\ln 2}-e^{-2\ln 2}\right)=5\left[\frac{1}{e^{\ln 2}}-\left(\frac{1}{e^{\ln 2}}\right)^2\right]=5\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{4}$$



b) Pro operátorový přenos platí:

$$F(p)=\mathscr{L}\{g(t)\}=5\mathscr{L}\left\{e^{-t/4}-e^{-t/2}\right\}=5\left(\frac{1}{p+1/4}-\frac{1}{p+1/2}\right)=5\left(\frac{4}{4p+1}-\frac{2}{2p+1}\right)=$$

$$=5\frac{8p+4-8p-2}{(4p+1)(2p+1)}=\frac{10}{(4p+1)(2p+1)}$$

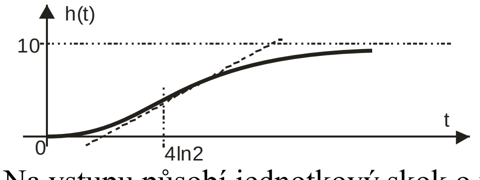
c) Pro přechodovou charakteristiku platí:

$$h(t)=\int_0^t g(\tau)\,d\tau=5\int_0^t\left(e^{-\tau/4}-e^{-\tau/2}\right)d\tau=5\left\{\left[\frac{e^{-\tau/4}}{-1/4}\right]_0^t-\left[\frac{e^{-\tau/2}}{-1/2}\right]_0^t\right\}=$$

$$=5\left\{\left[\frac{e^{-t/4}-1}{-1/4}\right]_0^t-\left[\frac{e^{-t/2}-1}{-1/2}\right]_0^t\right\}=5\left\{-4e^{-t/4}+4+2e^{-t/2}-2\right\}=10\left(1+e^{-t/2}-2e^{-t/4}\right)$$

$$h(0)=0, h(\infty)=10, h'(0)=g(0)=0, h'(\infty)=g(\infty)=0$$

Pro inflexní bod platí: $h''(t)=\left[h'(t)\right]'=g'(t)=0\Rightarrow\ t=4\ln 2$



d) Na vstupu působí jednotkový skok o velikosti 2. Odezva systému na takový signál je rovna $2h(t)$ a proto pro ustálenou hodnotu platí $\lim\limits_{t\to\infty}2h(t)=2\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=2*10=20$

3. Pro koeficienty c_m spektra diskrétního periodického signálu $f(k)$ s periodou $N=12$ platí: $c_0=1; c_1=j; c_4=1; c_8=1; c_{11}=-j; c_2=c_3=c_5=c_6=c_7=c_9=c_{10}=0$. **(15b)**

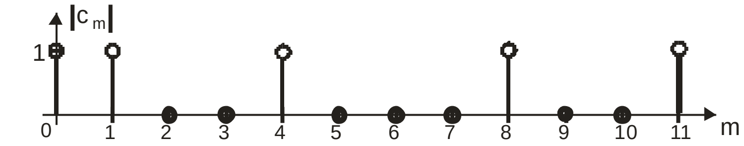
a) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum pro $m=0,1,2,...11$. Ocejchujte osy! **(5b)**

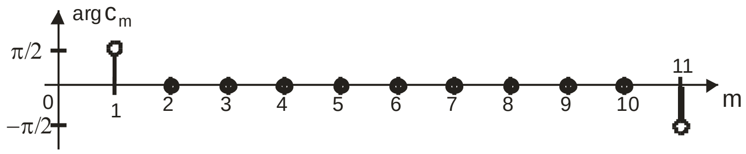
b) Napište výraz pro tento diskrétní signál $f(k)=$. **(5b)**

c) Určete amplitudové spektrum signálu $f(k-4)$**.** Zdůvodněte. **(5b)**

Řešení

a) Platí:





b) Platí:

$$f(k)=1+je^{j1\frac{2\pi}{12}k}-je^{j11\frac{2\pi}{12}k}+e^{j4\frac{2\pi}{12}k}+e^{j8\frac{2\pi}{12}k}=1+je^{j1\frac{2\pi}{12}k}-je^{j(12-1)\frac{2\pi}{12}k}+e^{j4\frac{2\pi}{12}k}+e^{-j4\frac{2\pi}{12}k}=$$

$$=1+je^{j1\frac{2\pi}{12}k}-je^{-j1\frac{2\pi}{12}k}+e^{j4\frac{2\pi}{12}k}+e^{-j4\frac{2\pi}{12}k}=1-2\frac{e^{j1\frac{2\pi}{12}k}-e^{-j1\frac{2\pi}{12}k}}{2j}+2\frac{e^{j4\frac{2\pi}{12}k}+e^{-j4\frac{2\pi}{12}k}}{2}=$$

$$=1-2\sin\left(\frac{2\pi}{12}k\right)+2\cos\left(4\frac{2\pi}{12}k\right)$$

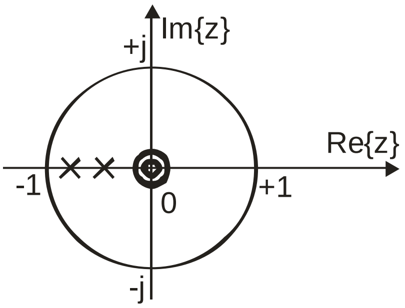
c) Amplitudové spektrum posunutého signálu $f(k-4)$ je stejné jako amplitudové spektrum původního signálu $f(k)$. Při posunutí signálu se mění jen jeho fázové spektrum.

4. Diskrétní systém má dva póly $z_1 = -0,4;\ z_2 = -0,8$ a jednu dvojnásobnou nulu $n_1 = n_2 = 0$ a poměr koeficientů čitatele a jmenovatele u nejvyšších mocnin přenosové funkce je roven 1. (**20b**)

a) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. (**3b**)
b) Vypočtěte operátorový přenos celého systému (**2b**)
c) Vypočtěte impulsní charakteristiku celého systému (**8b**)
d) Určete diferenční rovnici celého systému (**4b**)
e) Rozhodněte o stabilitě celého systému, zdůvodněte. (**3b**)

Řešení:

a) Rozložení pólů a nul:



b) Pro operátorový přenos platí:

$$F(z) = \frac{z^2}{(z+0,4)(z+0,8)}$$

c) Pro impulsní charakteristiku platí

$$F(z) = \frac{z^2}{(z+0,4)(z+0,8)} = \frac{Az}{z+0,4} + \frac{Bz}{z+0,8} = \frac{Az^2 + 0,8Az + Bz^2 + 0,4Bz}{(z+0,4)(z+0,8)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} A + B = 1 \\ 0,8A + 0,4B = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = 1 - B \\ 0,8(1-B) + 0,4B = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = 1 - B \\ 0,8 - 0,4B = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = -1 \\ B = 2 \end{matrix}$$

$$F(z) = \frac{2z}{z+0,8} - \frac{z}{z+0,4} \qquad \Rightarrow g(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \begin{cases} 2(-0,8)^k - (-0,4)^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

d) Pro diferenční rovnici platí

$$F(z) = \frac{z^2}{(z+0,4)(z+0,8)} = \frac{z^2}{z^2 + 1,2z + 0,32} = \frac{1}{1 + 1,2z^{-1} + 0,32z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Y(z)\left(1 + 1,2z^{-1} + 0,32z^{-2}\right) = U(z) \quad \Rightarrow \quad y(k) + 1,2y(k-1) + 0,32y(k-2) = u(k)$$

e) Oba póly systému leží uvnitř jednotkové kružnice, a proto je systém stabilní.