B/KSAS- termín 1, sk.A, 7.1.2013	Jméno	ID

1. Je dán spojitý signál

$$f\left(t\right)=A\left\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[\sigma\left(t-iP\right)-\sigma\left(t-P/2-iP\right)\right]\right\}\sin\omega t,\quad \omega=2\pi/P,\quad A,P>0\quad \textbf{(15b)}$$

a) Načrtněte časový průběh signálu **(5b)**

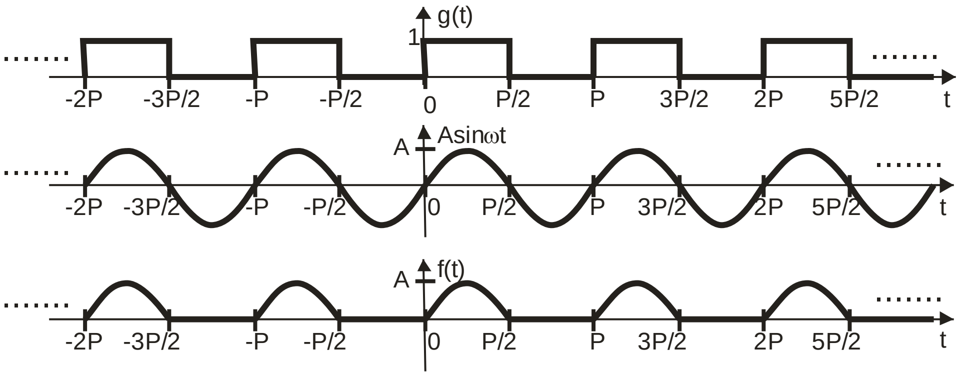
b) Určete, zda je periodický- pokud ano, určete jeho periodu. (**2b**).

c) Vypočtěte stejnosměrnou složku signálu. **(5b)**

d) Vypočtěte výkon signálu. (**3b**)

Řešení

a) $f\left(t\right)=Ag\left(t\right)\sin\omega t,\quad kde\quad g\left(t\right)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[\sigma\left(t-iP\right)-\sigma\left(t-P/2-iP\right)\right],A,\omega>0,P=2\pi/\omega$



b) Signál je periodický s periodou P.

c) Stejnosměrná složka je rovna koeficientu spektra c_0.

$$c_0=\frac{1}{P}\int_0^P f\left(t\right)dt=\frac{1}{P}\int_0^{P/2}A\sin\omega t dt=\frac{A}{P}\left[\frac{-\cos\omega t}{\omega}\right]_0^{P/2}=-\frac{A}{P\omega}\left[\cos\omega P/2-1\right]=$$

$$=-\frac{A}{2\pi}\left[\cos\pi-1\right]=-\frac{A}{2\pi}\left[-1-1\right]=\frac{A}{\pi}$$

d) Pro výkon signálu platí.

$$P_W=\frac{1}{P}\int_0^P\left|f\left(t\right)\right|^2dt=\frac{A^2}{P}\int_0^{P/2}\sin^2\omega t dt=\frac{A^2}{P}\int_0^{P/2}\left(\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right)^2dt=\frac{A^2}{-4P}\int_0^{P/2}\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right)^2dt=$$

$$=\frac{A^2}{-4P}\int_0^{P/2}\left(e^{2j\omega t}-2e^{2j\omega t}e^{-2j\omega t}+e^{-2j\omega t}\right)dt==\frac{A^2}{-4P}\int_0^{P/2}\left(2\cos2\omega t-2\right)dt=\frac{A^2}{2P}\int_0^{P/2}\left(1-\cos2\omega t\right)dt=$$

$$=\frac{A^2}{2P}\left\{\left[t\right]_0^{P/2}-\left[\frac{\sin2\omega t}{2\omega}\right]_0^{P/2}\right\}=\frac{A^2}{2P}\left\{\frac{P}{2}-\frac{\sin\omega P}{2\omega}\right\}=\frac{A^2}{2P}\left\{\frac{P}{2}-\frac{\sin2\pi}{2\omega}\right\}=\frac{A^2}{4}$$

2. Spojitý systém má přechodovou charakteristiku $h(t)=\begin{cases}5\left(1+e^{-t}-2e^{-t/2}\right) & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ (**20b**)

a) Načrtněte tuto charakteristiku. Popište a ocejchujte osy. (**4b**)

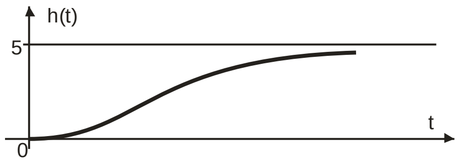
b) Vypočtěte a načrtněte impulsovou charakteristiku $g(t)$ (**4b**). Popište a ocejchujte osy (**2b**)

c) Vypočtěte operátorový přenos systému (**4b**)

d) Na vstupu systému působí signál $u(t)=2\exp(jt)$. Určete ustálenou amplitudu a fázi výstupního signálu $y(t)$ po odeznění přechodového děje. (pomůcka: $\arctan 2 \doteq 63°$). (**6b**)

Řešení:

a) Přechodová charakteristika $h(0)=0, h'(0)=0, h(\infty)=5, h'(\infty)=0$

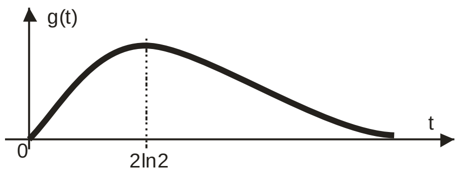


b) Pro impulsovou charakteristiku platí

$$g(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(5+5e^{-t}-10e^{-t/2}\right)=-5e^{-t}-10\left(-\frac{1}{2}e^{-t/2}\right)=5e^{-t/2}-5e^{-t}=5\left(e^{-t/2}-e^{-t}\right)$$

Extrém: $g'(t)=5\left(-\frac{1}{2}e^{-t/2}+e^{-t}\right)=0 \Rightarrow \quad e^{-t}=\frac{1}{2}e^{-t/2} \Rightarrow \quad 2=e^{+t/2} \Rightarrow \quad t=2\ln 2$

$g(0)=0,\ g'(0)=5(-0{,}5+1)=2{,}5,\ g(\infty)=0,\ g'(\infty)=0$



c) Platí

$$F(p)=\mathscr{L}\{g(t)\}=5\mathscr{L}\left\{e^{-t/2}-e^{-t}\right\}=5\left(\frac{1}{p+1/2}-\frac{1}{p+1}\right)=5\left(\frac{2}{2p+1}-\frac{1}{p+1}\right)=$$

$$=5\frac{2p+2-2p-1}{(2p+1)(p+1)}=\frac{5}{(2p+1)(p+1)}$$

d) Na vstupu působí harmonický signál $u(t)=2\exp(jt)=2\exp(j\omega t)$ kde $\omega=1$. Na výstupu systému bude po odeznění přechodového děje opět harmonický signál $y(t)=A\exp\left[j(\omega t+\varphi)\right]$ s kmitočtem $\omega=1$. Pro jeho amplitudu A a fázi φ platí:

$$A=2\left[\left|F(j\omega)\right|\right]_{\omega=1}=2\left[\left|\frac{5}{(2j\omega+1)(j\omega+1)}\right|\right]_{\omega=1}=2\left[\left|\frac{5}{\sqrt{4\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+1}}\right|\right]_{\omega=1}=\frac{10}{\sqrt{5}\sqrt{2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

$$\varphi=\left[\arg F(j\omega)\right]_{\omega=1}=\left[-\arctan 2\omega-\arctan\omega\right]_{\omega=1}=-\arctan 2-\arctan 1\doteq -63°-45°=-108°$$

3. Pro koeficienty c_m spektra diskrétního periodického signálu $f(k)$ s periodou $N=12$ platí: $c_0=1; c_1=-j; c_3=1; c_9=1; c_{11}=j; c_2=c_4=c_5=c_6=c_7=c_8=c_{10}=0$. **(15b)**

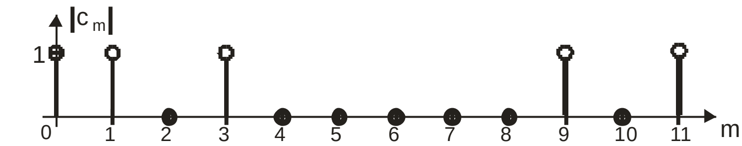
a) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum pro $m=0,1,2,...11$. Ocejchujte osy! **(5b)**

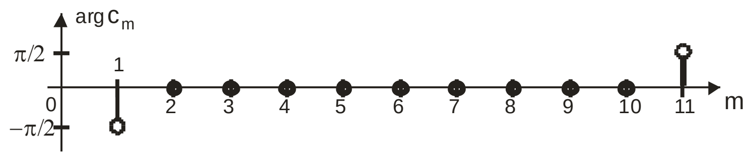
b) Napište výraz pro tento diskrétní signál $f(k)=$. **(5b)**

c) Určete amplitudové spektrum signálu $f(k-3)$. Zdůvodněte. **(5b)**

Řešení

a) Platí:





b) Platí:

$$f(k)=1-je^{j1\frac{2\pi}{12}k}+je^{j11\frac{2\pi}{12}k}+e^{j3\frac{2\pi}{12}k}+e^{j9\frac{2\pi}{12}k}=1-je^{j1\frac{2\pi}{12}k}+je^{j(12-1)\frac{2\pi}{12}k}+e^{j3\frac{2\pi}{12}k}+e^{j(12-3)\frac{2\pi}{12}k}=$$

$$=1-je^{j1\frac{2\pi}{12}k}+je^{-j1\frac{2\pi}{12}k}+e^{j3\frac{2\pi}{12}k}+e^{-j3\frac{2\pi}{12}k}=1+2\frac{e^{j1\frac{2\pi}{12}k}-e^{-j1\frac{2\pi}{12}k}}{2j}+2\frac{e^{j3\frac{2\pi}{12}k}+e^{-j3\frac{2\pi}{12}k}}{2}=$$

$$=1+2\sin\left(\frac{2\pi}{12}k\right)+2\cos\left(3\frac{2\pi}{12}k\right)$$

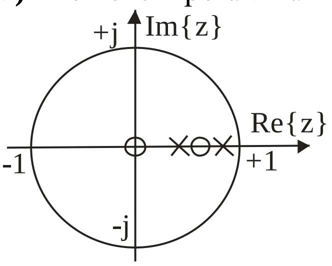
c) Amplitudové spektrum posunutého signálu $f(k-3)$ je stejné jako amplitudové spektrum původního signálu $f(k)$. Při posunutí signálu se mění jen jeho fázové spektrum.

4. Diskrétní systém má dva póly $z_1 = 0,5; z_2 = 0,8$ a dvě nuly $n_1 = 0, n_2 = 0,65$ a poměr koeficientů u nejvyšších mocnin polynomu čitatele a jmenovatele přenosové funkce je roven 2. (**20b**)

a) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. (**3b**)
b) Vypočtěte operátorový přenos celého systému (**2b**)
c) Vypočtěte impulsní charakteristiku celého systému (**8b**)
d) Určete diferenční rovnici celého systému (**4b**)
e) Rozhodněte o stabilitě celého systému, zdůvodněte. (**3b**)

Řešení:

a) Rozložení pólů a nul



b) Pro operátorový přenos platí:

$$F(z) = 2\frac{z(z-0,65)}{(z-0,5)(z-0,8)} = \frac{2z^2-1,3z}{(z-0,5)(z-0,8)}.$$

c) Pro impulsní charakteristiku platí:

$$F(z) = \frac{2z^2-1,3z}{(z-0,5)(z-0,8)} = \frac{Az}{z-0,5} + \frac{Bz}{z-0,8} = \frac{Az^2-0,8Az+Bz^2-0,5Bz}{(z-0,5)(z-0,8)} =$$

$$= \frac{z^2(A+B)-z(0,8A+0,5B)}{(z-0,5)(z-0,8)} \Rightarrow \begin{array}{c} A+B=2 \\ 0,8A+0,5B=1,3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A=2-B \\ 1,6-0,8B+0,5B=1,3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A=1 \\ B=1 \end{array}$$

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-0,5} + \frac{z}{z-0,8}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-0,5}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-0,8}\right\} = 0,5^k + 0,8^k$$

d) Pro diferenční rovnici platí:

$$F(z) = \frac{2z^2-1,3z}{(z-0,5)(z-0,8)} = \frac{2z^2-1,3z}{z^2-1,3z+0,4} = \frac{2-1,3z^{-1}}{1-1,3z^{-1}+0,4z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Y(z)\left(1-1,3z^{-1}+0,4z^{-2}\right) = U(z)\left(2-1,3z^{-1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y(k)-1,3y(k-1)+0,4y(k-2) = 2u(k)-1,3u(k-1)$$

e) Oba póly systému leží uvnitř jednotkové kružnice, a proto je systém stabilní.