

1. Je dán signál se spojitým časem  $f(t) = A\delta(t)$  kde  $\delta(t)$  je Diracův impuls a  $A = 2$ . (15 b)

a) Načrtněte průběh signálu (3b). Popište osy a v obrázku vyznačte konstantu  $A$  (1b). (4b)

b) Určete, zda je signál periodický (1b).

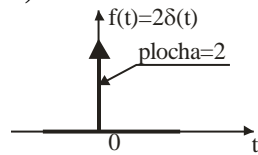
c) Vypočtěte jeho frekvenční spektrum (5b).

d) Načrtněte amplitudové (2b) a fázové (2b) spektrum. Popište osy (1b)

Pomůcka (filtrační vlastnost Diracova impulsu):  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$

**Řešení:**

a) Plocha Diracova impulsu=2.



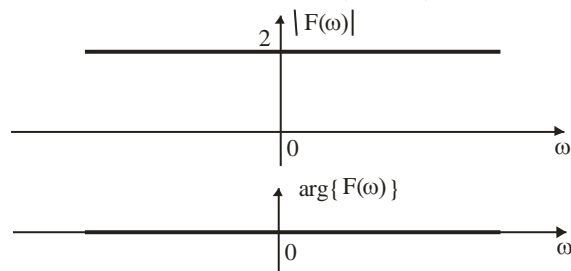
b) Signál není periodický.

c) Spektrum určíme jako jeho Fourierovu transformaci s využitím pomůcky. Platí

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 2e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 2$$

d) Pro amplitudové a fázové spektrum platí:

$$|F(\omega)| = 2; \quad \Phi(\omega) = \arg\{F(\omega)\} = 0$$

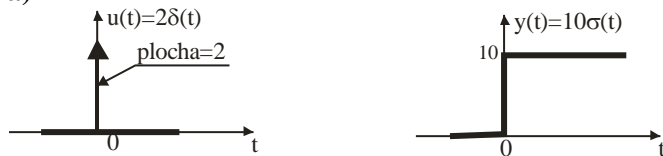


2. Na vstupu spojitého systému působí signál  $u(t) = 2\delta(t)$  a na výstupu systému je signál  $y(t) = 10\sigma(t)$ . (20b)

- Načrtněte vstupní a výstupní signál (2b). Popište osy (1b). (3b)
- Určete operátorový přenos systému (1b) a diferenciální rovnici systému (1b). (2b).
- Načrtněte rozložení pólů a nul (3b). Popište osy (1b) a rozhodněte o stabilitě (1b). (5b)
- Vypočtěte (2b) a načrtněte (2b) impulsovou charakteristiku. Popište osy (1b). (5b)
- Načrtněte amplitudovou (2b) a fázovou (2b) frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Popište osy (1b). (5b).

### Řešení

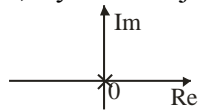
a)



b) Pro operátorový přenos a diferenciální rovnici platí

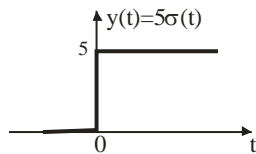
$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{10/p}{2} = \frac{5}{p} \Rightarrow pY(p) = 5U(p) \Rightarrow y'(t) = 5u(t)$$

c) Systém má jeden pól a žádnou nulu. Pól leží na imaginární ose- systém je na mezi stability.



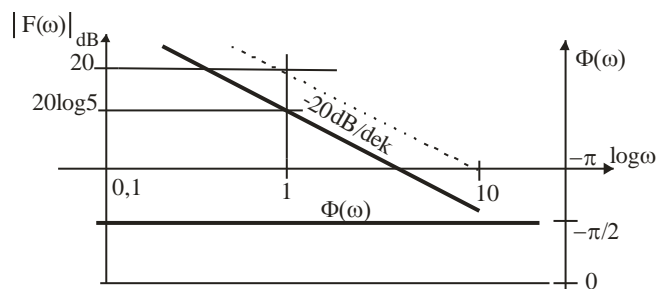
d) Pro impulsovou charakteristiku platí

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{p}\right\} = 5\sigma(t)$$



e) Pro frekvenční přenos platí:

$$F(j\omega) = \frac{5}{j\omega} = \frac{5}{\omega} e^{-j\pi/2} \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} = 20\log 5 - 20\log \omega; \quad \Phi(\omega) = -\pi/2$$

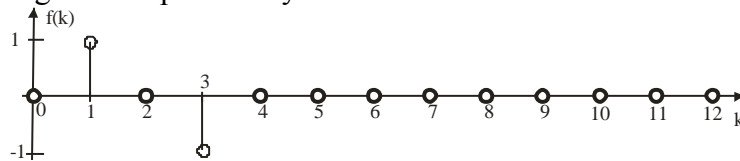


3. Diskrétní signál nabývá hodnot  $f(0) = 0; f(1) = 1; f(2) = 0; f(3) = -1$ . Ostatní hodnoty jsou nulové.

- a) Rozhodněte, zda je signál periodický (1b) a načrtněte ho pro  $k = 0, 1, 2, \dots, 12$  (3b). Popište a ocejchujte osy (1b). (5b)  
 b) Vypočtete spektrum signálu. (5b)  
 c) Načrtněte amplitudové (2b) a fázové (2b) spektrum signálu. Ocejchujte a popište osy (1b). (5b)

### Řešení

a) Signál není periodický.



b) Pro koeficienty spektra platí:

$$F(m) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-jm \frac{2\pi}{N} k} = f(0) e^{-jm \frac{2\pi}{4} 0} + f(1) e^{-jm \frac{2\pi}{4} 1} + f(2) e^{-jm \frac{2\pi}{4} 2} + f(3) e^{-jm \frac{2\pi}{4} 3} =$$

$$= 0 + 1 * e^{-jm \frac{\pi}{2} 1} + 0 * e^{-jm \frac{\pi}{2} 2} - 1 * e^{-jm \frac{\pi}{2} 3} = e^{-jm \frac{\pi}{2} 1} - e^{-jm \frac{\pi}{2} 3} = (-j)^m - (+j)^m \quad m = 0, 1, 2, 3$$

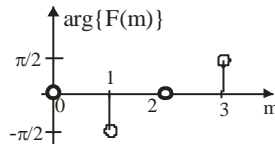
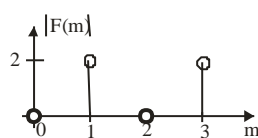
$$F(0) = (-j)^0 - (+j)^0 = 1 - 1 = 0 \quad F(1) = (-j)^1 - (+j)^1 = -j - j = -2j$$

$$F(2) = (-j)^2 - (+j)^2 = -1 + 1 = 0 \quad F(3) = (-j)^3 - (+j)^3 = +1 + 1 = +2j$$

c) Pro amplitudové a fázové spektrum platí:

$$F(0) = 0 \quad |F(0)| = 0; \quad \arg\{F(0)\} = 0 \quad F(1) = -2j \quad |F(1)| = 2; \quad \arg\{F(1)\} = -\pi/2$$

$$F(2) = 0 \quad |F(2)| = 0; \quad \arg\{F(2)\} = 0 \quad F(3) = +2j \quad |F(3)| = 2; \quad \arg\{F(3)\} = +\pi/2$$



4. Lineární diskrétní systém má na svém vstupu signál  $u(k) = 2\delta(k)$  a na výstupu signál  $y(k) = 10\sigma(k)$ . (20b)

- Určete Z přenos systému (2b) a diferenční rovnici systému (2b). (4b)
- Načrtněte rozložení pólů a nul (2b). Popište osy (1b). Určete stabilitu systému (1b). (4b)
- Určete impulsovou charakteristiku (2b) a načrtněte ji pro  $k = 0, 1, 2, 3$  (2b). Popište a ocejchujte osy (2b). (6b)
- Určete přechodovou charakteristiku (2b) a načrtněte ji pro  $k = 0, 1, 2, 3$  (2b). Popište a ocejchujte osy (2b). (6b)

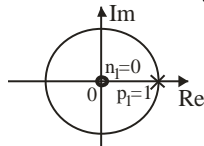
### Řešení

a) Pro operátorový přenos a diferenční rovnici platí:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y(k)\}}{\mathcal{Z}\{u(k)\}} = \frac{10z/(z-1)}{2} = \frac{5z}{z-1} = \frac{5}{1-z^{-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(z)(1-z^{-1}) = 5U(z) \Rightarrow y(k) - y(k-1) = 5u(k)$$

b) Systém má jednu nulu  $n_1 = 0$  a jeden pól  $z_1 = 1$ . Pól leží na jednotkové kružnici- systém je na mezi stability.



c) **První způsob:** Vzhledem k tomu, že na vstupu je signál  $u(k) = 2\delta(k)$  bude pro impulsovou charakteristiku platit  $g(k) = y(k)/2 = 5\sigma(k)$

**Druhý způsob:** dělení polynomů.

| čitatel |       | jmenovatel |       | podíl |          |          |          |          |
|---------|-------|------------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|
| $z^1$   | $z^0$ | $z^1$      | $z^0$ | $z^0$ | $z^{-1}$ | $z^{-2}$ | $z^{-3}$ | $z^{-4}$ |
| 5       | 0     | 1          | -1    | 5,000 | 5,000    | 5,000    | 5,000    | 5,000    |

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 5 \quad -5 \\ \hline 0 \quad 5 \end{array} \\ \begin{array}{r} \quad 5 \quad -5 \\ \hline \quad 0 \quad 5 \end{array} \\ \begin{array}{r} \quad \quad 5 \quad -5 \\ \hline \quad \quad 0 \quad 5 \end{array} \\ \begin{array}{r} \quad \quad \quad 5 \quad -5 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \quad 5 \end{array} \\ \begin{array}{r} \quad \quad \quad \quad 5 \quad -5 \\ \hline \quad \quad \quad \quad 0 \quad 5 \end{array} \end{array}$$

**Třetí způsob:** přímé řešení diferenční rovnice pro  $u(k) = \delta(k)$ .

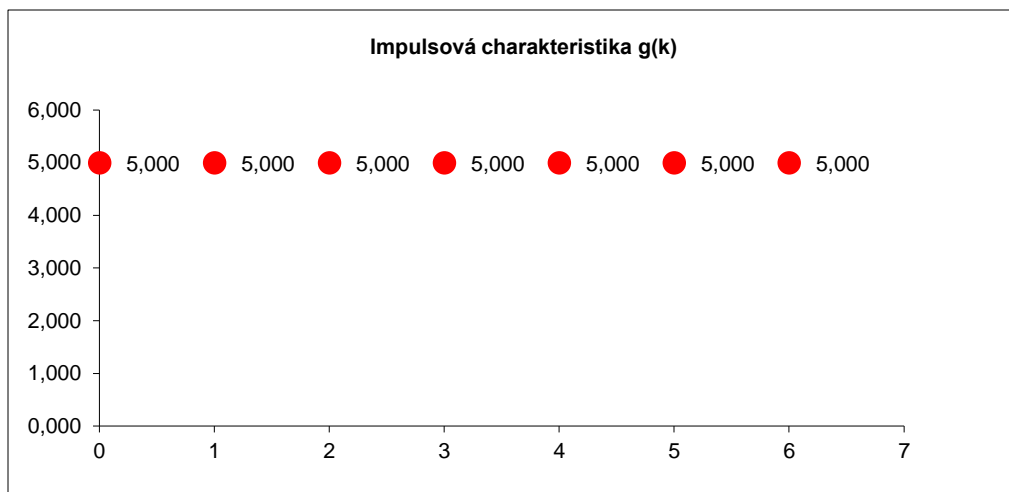
$$y(k) = y(k-1) + 5u(k); \quad u(k) = \delta(k)$$

$$k = 0 \quad y(0) = y(0-1) + 5u(0) = 0 + 5 = 5$$

$$k = 1 \quad y(1) = y(1-1) + 5u(1) = 5 + 0 = 5$$

$$k = 2 \quad y(2) = y(2-1) + 5u(2) = 5 + 0 = 5$$

$$k = 3 \quad y(3) = y(3-1) + 5u(3) = 5 + 0 = 5$$



d) Určení přechodové charakteristiky

**První způsob:** analyticky z impulsové charakteristiky

$$h(k) = \sum_{i=0}^k g(k) = \sum_{i=0}^k 5 = 5 \sum_{i=0}^k 1 = 5k \quad \text{pro } k \geq 0; \quad h(k) = 0 \quad \text{pro } k < 0$$

**Druhý způsob:** numerickou sumací impulsové charakteristiky

$$h(k) = h(k-1) + g(k)$$

$$k=0 \quad h(0) = h(0-1) + g(0) = 0 + 5 = 5$$

$$k=1 \quad h(1) = h(1-1) + g(1) = 5 + 5 = 10$$

$$k=2 \quad h(2) = h(2-1) + g(2) = 10 + 5 = 15$$

$$k=3 \quad h(3) = h(3-1) + g(3) = 15 + 5 = 20$$

**Třetí způsob:** přímé řešení diferenční rovnice pro  $u(k) = \sigma(k)$ .

$$y(k) = y(k-1) + 5u(k); \quad u(k) = \sigma(k)$$

$$k=0 \quad y(0) = y(0-1) + 5u(0) = 0 + 5 = 5$$

$$k=1 \quad y(1) = y(1-1) + 5u(1) = 5 + 5 = 10$$

$$k=2 \quad y(2) = y(2-1) + 5u(2) = 10 + 5 = 15$$

$$k=3 \quad y(3) = y(3-1) + 5u(3) = 15 + 5 = 20$$

