

1. Periodický signál se spojitým časem a periodou $P > 0$ má následující koeficienty spektra:

$$c_{-1} = 0,5j; c_0 = 1; c_{+1} = -0,5j; . \text{ Ostatní koeficienty jsou nulové. (15 b)}$$

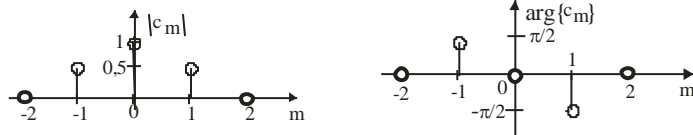
a) Načrtněte amplitudové (2b) a fázové (2b) spektrum. Popište a ocejchujte osy (1b). (5b)

b) Vypočítejte časový průběh signálu (5b).

c) Načrtněte jednu periodu průběhu signálu. Popište a ocejchujte osy. (5b)

Řešení:

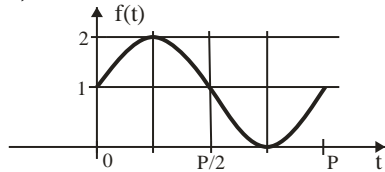
$$\text{a) } |c_{-1}| = 0,5; \arg\{c_{-1}\} = \pi/2 \quad |c_0| = 1; \arg\{c_0\} = 0 \quad |c_{+1}| = 0,5; \arg\{c_{+1}\} = -\pi/2$$



b) Pro časový průběh signálu platí:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{jm\frac{2\pi}{P}t} = c_{-1}e^{j(-1)\frac{2\pi}{P}t} + c_0e^{j0\frac{2\pi}{P}t} + c_{+1}e^{j1\frac{2\pi}{P}t} = 0,5je^{-j\frac{2\pi}{P}t} + 1 - 0,5je^{j\frac{2\pi}{P}t} = \\ &= 1 - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{2\pi}{P}t} + \frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{P}t} = 1 + \frac{e^{+j\frac{2\pi}{P}t} - e^{-j\frac{2\pi}{P}t}}{2j} = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) \end{aligned}$$

c)



2. Spojitý dynamický systém má operátorový přenos $F(p) = \frac{2}{2p+1}$. (20b)

a) Napište diferenciální rovnici systému (2b)

b) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. Rozhodněte o stabilitě. (3b)

c) Vypočtěte (2b) a načrtněte (2b) impulsovou charakteristiku. Popište a oceňte osy. V grafu vyznačte časovou konstantu systému (1b). (5b)

d) Vypočtěte (2b) a načrtněte (2b) přechodovou charakteristiku. V grafu vyznačte časovou konstantu systému (1b). (5b)

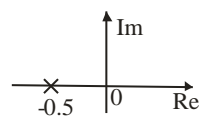
e) Načrtněte amplitudovou (2b) a fázovou (2b) frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Popište a oceňte osy, popište sklony asymptot. (1b). (5b)

Řešení

a) Pro diferenciální rovnici systému platí

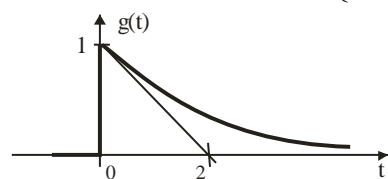
$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{2}{2p+1} \Rightarrow 2pY(p) + Y(p) = 2U(p) \Rightarrow 2y'(t) + y(t) = 2u(t)$$

b) Systém má jeden pól $p_1 = -0,5$ a žádnou nulu. Pól leží v levé polorovině- systém je stabilní.



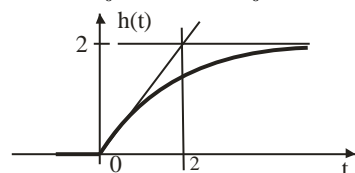
c)

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{2p+1}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+0,5}\right\} = \begin{cases} e^{-0,5t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



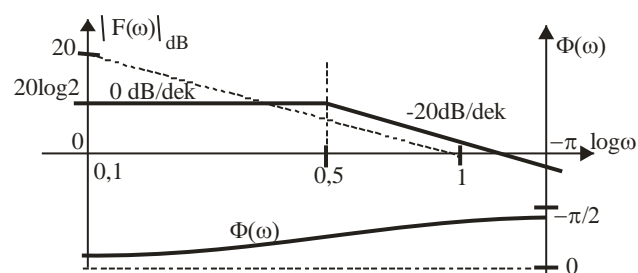
d) Pro přechodovou charakteristiku platí

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-0,5\tau} d\tau = \left[\frac{e^{-0,5\tau}}{-0,5} \right]_0^t = 2(1 - e^{-0,5t})$$



e)

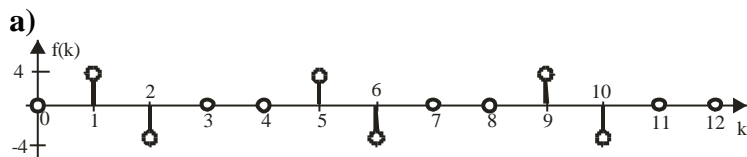
$$F(j\omega) = \frac{2}{2j\omega+1} = \frac{2}{\sqrt{4\omega^2+1}} e^{-j\arctan 2\omega} \quad |F(j\omega)|_{dB} = 20\log 2 - 20\log \sqrt{4\omega^2+1} \quad \Phi(\omega) = -\arctan 2\omega$$



3. Pro jednu periodu diskretního periodického signálu s periodou $N = 4$ platí:
 $f(k) = 4[\delta(k-1) - \delta(k-2)]$, $k = 0, 1, 2, 3$ kde $\delta(k)$ je jednotkový impuls. (15b)

- a) Načrtněte hodnoty signálu pro $k = 0, 1, 2, \dots, 12$. Ocejchujte osy. (3b)
 b) Vypočítejte spektrum tohoto signálu. (4b)
 c) Načrtněte amplitudové (4b) a fázové (4b) spektrum tohoto signálu. Ocejchujte osy.

Řešení



b) Pro výpočet koeficientů diskrétní Fourierovy řady platí

$$c_m = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f(k) e^{-jm\frac{2\pi}{4}k} \quad m = 0, 1, 2, 3. \text{ Jelikož } f(1) = 4, f(2) = -4, f(0) = f(3) = 0 \text{ bude}$$

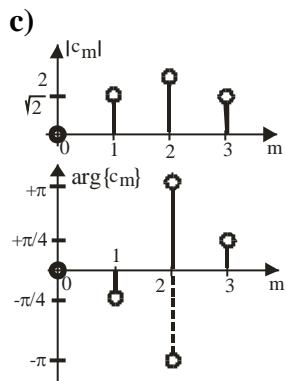
$$c_m = \frac{1}{4} f(1) e^{-jm\frac{2\pi}{4} \cdot 1} + \frac{1}{4} f(2) e^{-jm\frac{2\pi}{4} \cdot 2} = \frac{1}{4} 4 e^{-jm\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} 4 e^{-jm\pi} = e^{-jm\frac{\pi}{2}} - e^{-jm\pi} = (-j)^m - (-1)^m \quad m = 0, 1, 2, 3$$

$$c_0 = (-j)^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0 \quad |c_0| = 0 \quad \arg c_0 = 0$$

$$c_1 = (-j)^1 - (-1)^1 = -j + 1 \quad |c_1| = \sqrt{2} \quad \arg c_1 = -\pi/4$$

$$c_2 = (-j)^2 - (-1)^2 = -1 - 1 = -2 \quad |c_2| = 2 \quad \arg c_2 = \pm\pi$$

$$c_3 = (-j)^3 - (-1)^3 = +j + 1 \quad |c_3| = \sqrt{2} \quad \arg c_3 = +\pi/4$$



4. Diskrétní systém je popsán operátorovým přenosem $F(z) = \frac{1}{z+1/2}$. (20b)

- a) Určete jeho diferenční rovnici. Dále předpokládejte nulové počáteční podmínky. (2b)
 b) Načrtněte rozložení pólů a nul (1b). Popište osy (1b)
 c) Rozhodněte o jeho stabilitě. (1b)
 d) Vypočtěte (4b) a načrtněte (3b) jeho impulsní charakteristiku pro $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
 e) Vypočtěte (5b) a načrtněte (3b) jeho přechodovou charakteristiku pro $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

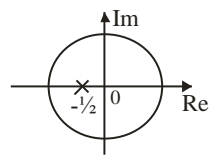
Řešení

a) Platí

$$F(z) = \frac{1}{z+1/2} \frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1+1/2z^{-1}} = \frac{Y(z)}{U(z)} \Rightarrow Y(z)[1+1/2z^{-1}] = z^{-1}U(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(k) + 1/2y(k-1) = u(k-1) \Rightarrow y(k) = -1/2y(k-1) + u(k-1)$$

b) Systém má jeden pól $z_1 = -1/2$ a žádnou nulu.



c) Pól leží uvnitř jednotkové kružnice a proto je systém stabilní.

d) **Způsob 1 – výpočet z operátorového přenosu.** Platí

$$g(k) = Z^{-1}[F(z)] = Z^{-1}\left[\frac{1}{z+1/2}\right] = Z^{-1}\left[z^{-1} \frac{z}{z+1/2}\right] = Z^{-1}\left[z^{-1} \frac{z}{z-(-1/2)}\right] = \begin{cases} (-1/2)^{k-1} & k \geq 1 \\ 0 & k < 1 \end{cases}$$

$$g(0) = 0 \quad g(1) = (-1/2)^{1-1} = 1 \quad g(2) = (-1/2)^{2-1} = -1/2$$

$$g(3) = (-1/2)^{3-1} = 1/4 \quad g(4) = (-1/2)^{4-1} = -1/8$$

d) **Způsob 2 – dělení polynomů**

čítatel		jmenovatel		podíl				
z^1	z^0	z^1	z^0	z^0	z^{-1}	z^{-2}	z^{-3}	z^{-4}
0	1	1	0,5	0,000	1,000	-0,500	0,250	0,125

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \\ \quad 1 \quad 0,5 \\ \hline 0 \quad -0,5 \\ \quad -0,5 \quad -0,25 \\ \hline 0 \quad 0,25 \\ \quad 0,25 \quad 0,125 \\ \hline 0 \quad -0,125 \end{array}$$

d) **Způsob 3 – postupným řešením diferenční rovnice**

$$y(k) = -1/2y(k-1) + u(k-1) \quad \text{pro } u(k) = \delta(k)$$

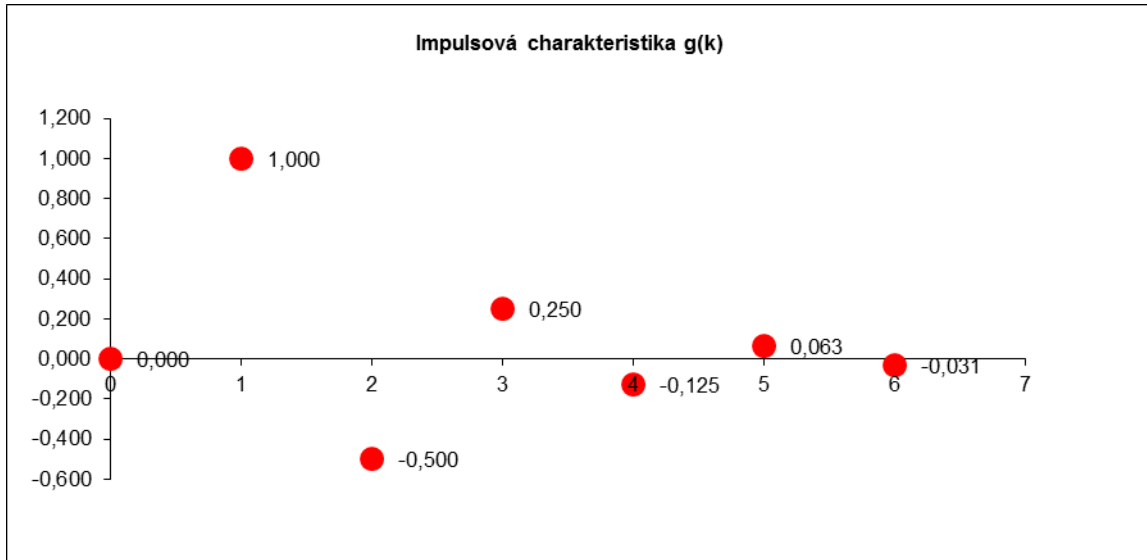
$$k=0 \quad y(0) = -1/2y(0-1) + u(0-1) = 0 + 0 = 0$$

$$k=1 \quad y(1) = -1/2y(1-1) + u(1-1) = 0 + 1 = 1$$

$$k=2 \quad y(2) = -1/2y(2-1) + u(2-1) = -1/2 + 0 = -1/2$$

$$k=3 \quad y(3) = -1/2y(3-1) + u(3-1) = (-1/2)(-1/2) + 0 = 1/4$$

$$k=4 \quad y(4) = -1/2y(4-1) + u(4-1) = (-1/2)(1/4) + 0 = -1/8$$



e) Platí

$$h(k) = \sum_{i=0}^k g(i) = \sum_{i=0}^{k-1} g(i) + g(k) = h(k-1) + g(k)$$

$$h(0) = g(0) = 0$$

$$h(1) = h(0) + g(1) = 0 + 1 = 1$$

$$h(2) = h(1) + g(2) = 1 - 1/2 = 1/2$$

$$h(3) = h(2) + g(3) = 1/2 + 1/4 = 3/4$$

$$h(4) = h(3) + g(4) = 3/4 - 1/8 = 5/8$$

