ISPS, Termín 1, 2011/12	Jméno	ID

Příklad 1. Je dán signál $f(t) = A\left[\sigma(t + a/2) - \sigma(t - a/2)\right]/2, t \in (-\infty, +\infty)$. (**15b**)

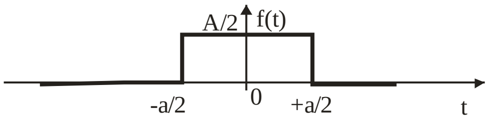
a) Načrtněte tento signál a rozhodněte, zda je periodický (**2b**)

b) Vypočtěte jeho spektrum. (**5b**)

c) Načrtněte amplitudové (**4b**) a fázové spektrum (**4b**). Popište a ocejchujte osy.

Řešení

a) Signál není periodický.

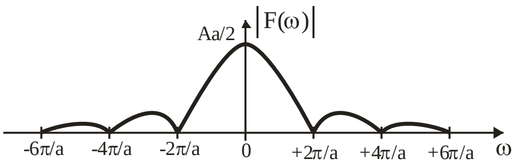


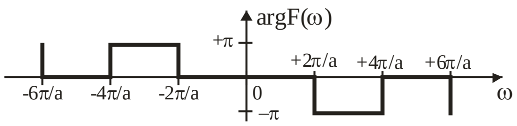
b) Pro jeho spektrum platí:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{A}{2} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{2}\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-a/2}^{+a/2} = \frac{A}{2}\frac{e^{-j\omega a/2} - e^{+j\omega a/2}}{-j\omega} = A\frac{e^{+j\omega a/2} - e^{-j\omega a/2}}{2j\omega} =$$

$$= A\frac{\sin(\omega a/2)}{\omega} = \frac{Aa}{2}\frac{\sin(\omega a/2)}{\omega a/2}$$

c) Pro nulové body amplitudového spektra platí $\omega a/2 = k\pi \Rightarrow \omega = 2k\pi/a, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Pro amplitudové a fázové spektrum platí:



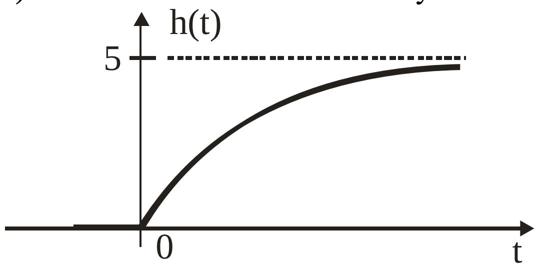


Příklad 2. Spojitý systém má přechodovou charakteristiku $h(t) = \begin{cases} 5\left(1-e^{-2t}\right) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ **(20b)**

a) Načrtněte tuto charakteristiku. Popište a ocejchujte osy. **(3b)**
b) Vypočtěte impulsovou charakteristiku (**3b**) a načrtněte ji. Popište a ocejchujte osy. (**4b**)
c) Vypočtěte operátorový přenos systému. (**2b**)
d) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. Rozhodněte o stabilitě systému. **(2b)**
e) Načrtněte amplitudovou (**3b**) a fázovou (**3b**) frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Popište a ocejchujte osy.

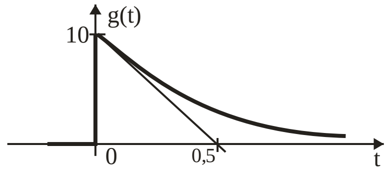
Řešení

a) Přechodová charakteristika systému.



b) Pro $t \geq 0$ platí pro impulsovou charakteristiku:

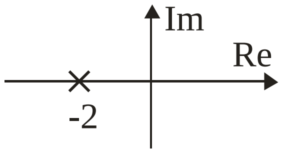
$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d}{dt} 5\left(1-e^{-2t}\right) = 10e^{-2t} \qquad \text{tedy} \qquad g(t) = \begin{cases} 10e^{-2t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



c) Pro operátorový přenos platí:

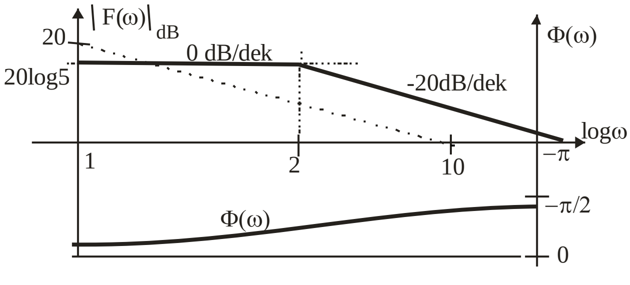
$$F(p) = \mathscr{L}\{g(t)\} = \mathscr{L}\left\{10e^{-2t}\right\} = \frac{10}{p+2}$$

d) Systém nemá žádnou nulu a má jediný pól $p_1 = -2$. Pól leží v levé polorovině- systém je stabilní.



e) Pro frekvenční přenos platí:

$$F(j\omega) = \frac{10}{j\omega+2} = \frac{5}{0{,}5j\omega+1} = \frac{5}{\sqrt{0{,}25\omega^2+1}} e^{-j\arctan(0{,}5\omega)}$$



Příklad 3. Spektrum diskrétního periodického signálu $f(k)$ s periodou $N=4$ má hodnoty $c_0=1; c_1=1; c_2=1; c_3=1$. (15**b**)

a) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum pro $m=0,1,2,3$. (**4b**)

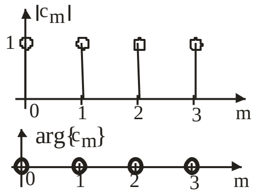
b) Určete hodnoty signálu $f(k)$ pro $k=0,1,2...12$. (**4b**)

c) Načrtněte signál $f(k)$ pro $k=0,1,2...12$. (**4b**)

d) Vyjádřete tento signál jako superpozici jednotkového impulsu. (**3b**)

Řešení

a) Pro amplitudové platí $|c_0|=|c_1|=|c_2|=|c_3|=1$, Pro fázové spektrum platí $\arg c_0=\arg c_1=\arg c_2=\arg c_3=0$.



b) Pro hodnoty signálu platí:

$$f(k)=\sum_{k=0}^{3} c_m e^{+jm\frac{2\pi}{4}k}=c_0 e^{j0\frac{\pi}{2}k}+c_1 e^{j1\frac{\pi}{2}k}+c_2 e^{j2\frac{\pi}{2}k}+c_3 e^{j3\frac{\pi}{2}k}=e^{j0\frac{\pi}{2}k}+e^{j1\frac{\pi}{2}k}+e^{j2\frac{\pi}{2}k}+e^{j3\frac{\pi}{2}k} \quad k=0,1,2,3$$

$$f(k)=e^{j0\frac{\pi}{2}k}+e^{j1\frac{\pi}{2}k}+e^{j2\frac{\pi}{2}k}+e^{j3\frac{\pi}{2}k}$$

$$f(0)=e^{j0\frac{\pi}{2}0}+e^{j1\frac{\pi}{2}0}+e^{j2\frac{\pi}{2}0}+e^{j3\frac{\pi}{2}0}=1+1+1+1=4$$

$$f(1)=e^{j0\frac{\pi}{2}1}+e^{j1\frac{\pi}{2}1}+e^{j2\frac{\pi}{2}1}+e^{j3\frac{\pi}{2}1}=1+j-1-j=0$$

$$f(2)=e^{j0\frac{\pi}{2}2}+e^{j1\frac{\pi}{2}2}+e^{j2\frac{\pi}{2}2}+e^{j3\frac{\pi}{2}2}=1-1+1-1=0$$

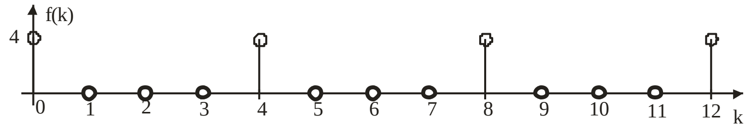
$$f(3)=e^{j0\frac{\pi}{2}3}+e^{j1\frac{\pi}{2}3}+e^{j2\frac{\pi}{2}3}+e^{j3\frac{\pi}{2}3}=1-j-1+j=0$$

Jelikož je signál periodický s periodou $N=4$ platí pro ostatní hodnoty *k*:

$f(0)=f(4)=f(8)=f(12)=4 \qquad f(1)=f(5)=f(9)=0$

$f(2)=f(6)=f(10)=0 \qquad f(3)=f(7)=f(11)=0$

c)



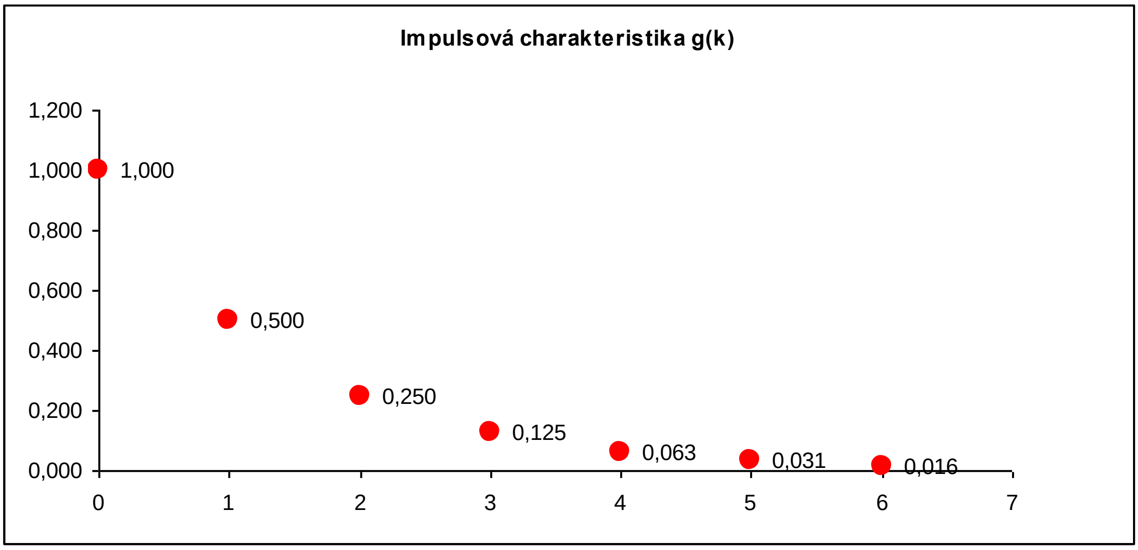
d)

$$f(k)=...+4\delta(k+8)+4\delta(k+4)+4\delta(k)+4\delta(k-4)+4\delta(k-8)+...=4\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\delta(k-4i)$$

Příklad 4. Lineární diskrétní systém se vstupem $u(k)$ a výstupem $y(k)$ je popsán svojí impulsní charakteristikou $g(k)=\begin{cases}(1/2)^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$ (**20b**)

a) Načrtněte impulsní charakteristiku pro $k=0,1,2,3..$ Popište a ocejchujte osy. (**4b**)
b) Vypočtěte *Z* přenos systému. (**2b**). Určete diferenční rovnici systému (**2b**).
c) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. Určete stabilitu systému. (**4b**)
d) Vypočtěte přechodovou charakteristiku (**4b**) a načrtněte ji pro $k=0,1,2,3..$ (**4b**)

Řešení
a)

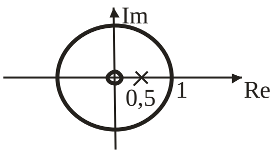


b)

$$F(z)=\mathcal{Z}\{g(k)\}=\mathcal{Z}\{(0,5)^k\}=\frac{z}{z-0,5}$$

$$F(z)=\frac{z}{z-0,5}=\frac{1}{1-0,5z^{-1}}=\frac{Y(z)}{U(z)} \Rightarrow Y(z)-0,5z^{-1}Y(z)=U(z) \Rightarrow y(k)-0,5y(k-1)=u(k)$$

c) Systém má jednu nulu $n_1=0$ a jeden pól $z_1=+0,5$ který leží uvnitř jednotkové kružnice a proto je stabilní.



d) Způsob 1- výpočet z impulsové charakteristiky

$$h(k)=\sum_{i=0}^{k}g(i)=\sum_{i=0}^{k}(0,5)^i=\frac{1-(0,5)^{k+1}}{1-0,5}=2\left[1-(0,5)^{k+1}\right]=2-(0,5)^k$$

$$h(0)=2-(0,5)^0=1$$

$$h(1)=2-(0,5)^1=1,5$$

$$h(2)=2-(0,5)^2=2-0,25=1,75$$

$$h(3)=2-(0,5)^3=2-0,125=1,875$$

Způsob 2- přímé řešení diferenční rovnice

$$y(k)=0,5y(k-1)+u(k) \quad u(k)=\sigma(k)$$

$$k=0 \quad y(0)=0,5y(-1)+u(0)=0+1=1$$

$$k=1 \quad y(1)=0,5y(0)+u(1)=0,5+1=1,5$$

$$k=2 \quad y(2)=0,5y(1)+u(2)=0,75+1=1,75$$

$$k=3 \quad y(3)=0,5y(2)+u(3)=0,875+1=1,875$$

Způsob 3 – postupnou sumací impulsní charakteristiky

$$h(k)=\sum_{i=0}^{k} g(i) \quad \Rightarrow \quad h(k)=h(k-1)+g(k)$$

$$h(0)=g(0)=1$$

$$h(1)=h(0)+g(1)=1+0,5=1,5$$

$$h(2)=h(1)+g(2)=1,5+0,25=1,75$$

$$h(3)=h(2)+g(3)=1,75+0,125=1,875$$