B/KSAS termín 3, 27.1.2012	Jméno	ID

1. Je dán signál se spojitým časem $f(t)=\begin{cases} K & t\in(0,a) \\ 0 & t\notin(0,a) \end{cases}$ kde $K>0$ (**15b**)

a) Vypočtěte spektrum signálu. (**3b**)

b) Vypočtěte amplitudové spektrum (**4b**) a načrtněte ho (**4b**). Ocejchujte osy.

Pomůcka: $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}$

c) Určete celkovou energii signálu. (**2b**)

d) Určete energii signálu v kmitočtovém rozsahu $\omega\in(-\infty,+\infty)$. (**2b**)

Řešení:

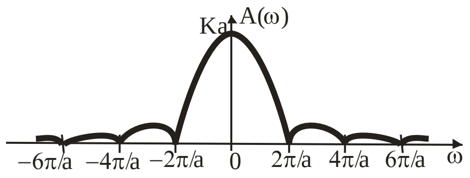
a) $F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int\limits_{0}^{a} Ke^{-j\omega t}dt=K\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_0^a=\frac{K}{-j\omega}\left(e^{-j\omega a}-1\right)=j\frac{K}{\omega}\left(e^{-j\omega a}-1\right)$

b) Amplitudové spektrum

$$A(\omega)=|F(\omega)|=\frac{K}{\omega}\left|e^{-j\omega a}-1\right|=\frac{K}{\omega}\left|\cos\omega a-j\sin\omega a-1\right|=\frac{K}{\omega}\sqrt{(\cos\omega a-1)^2+\sin^2\omega a}=$$

$$=\frac{K}{\omega}\sqrt{\cos^2\omega a-2\cos\omega a+1+\sin^2\omega a}=\frac{K}{\omega}\sqrt{2(1-\cos\omega a)}=\frac{2K}{\omega}\left|\sin\frac{\omega a}{2}\right|=Ka\left|\frac{\sin\frac{\omega a}{2}}{\frac{\omega a}{2}}\right|$$

Nulové body amplitudového spektra: $\frac{\omega a}{2}=n\pi,\ n=\pm1,\pm2,...\Rightarrow\omega=n\frac{2\pi}{a}$



c) $E=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt=\int\limits_{0}^{a}K^2dt=K^2[t]_0^a=K^2a$.

e) Na základě Parcevalovy rovnosti (energie v časové oblasti je rovna energii v kmitočtové oblasti) platí $E_{(-\infty,+\infty)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt=K^2a$.

2. Laplaceův obraz přechodové charakteristiky spojitého systému je

$$H(p)=\frac{10}{\left(10p^3+11p^2+p\right)} \qquad \textbf{(20b)}$$

a) Vypočtěte operátorový přenos systému (**6b**)
b) Určete diferenciální rovnici systému. (**2b**)
c) Vypočtěte impulsovou charakteristiku $g(t)$ (**4b**) a načrtněte ji. Popište a ocejchujte osy (**2b**)
d) Vypočtěte přechodovou charakteristiku $h(t)$ a načrtněte ji (**4b**). Popište a ocejchujte osy. (**2b**)

Pomůcka: $\frac{10}{9}\ln 10 \doteq 2,5$

Řešení:

a) Pro obraz přechodové charakteristiky platí

$$H(p)=\frac{10}{\left(10p^3+11p^2+p\right)}=\frac{10}{p\left(10p^2+11p+1\right)}=\frac{1}{p}F(p) \quad \Rightarrow$$

$$F(p)=\frac{10}{10p^2+11p+1}=\frac{10}{(10p+1)(p+1)}$$

b) Pro diferenciální rovnici bude platit:

$$F(p)=\frac{10}{10p^2+11p+1}=\frac{Y(p)}{U(p)} \quad \Rightarrow \quad Y(p)\left(10p^2+11p+1\right)=10U(p) \quad \Rightarrow \quad 10y''+11y'+y=10u$$

c) Pro impulsovou charakteristiku platí $g(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$. Rozkladem $F(p)$ na parciální zlomky obdržíme:

$$F(p)=\frac{10}{(10p+1)(p+1)}=\frac{A}{(10p+1)}+\frac{B}{(p+1)}=\frac{Ap+A+10Bp+B}{(10p+1)(p+1)} \Rightarrow \begin{matrix} A+B=10 \\ A+10B=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A=10-B \\ 10-B+10B=0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A=100/9, \quad B=-10/9$$

$$F(p)=\frac{100/9}{(10p+1)}-\frac{10/9}{(p+1)}=\frac{10/9}{(p+1/10)}-\frac{10/9}{(p+1)} \quad \Rightarrow \quad g(t)=\frac{10}{9}\left(e^{-\frac{t}{10}}-e^{-t}\right)$$

Platí $g(0)=0,\ g(\infty)=0,\ g'(\infty)=0$. Pro hodnotu extrému platí:

$$g'(t)=\frac{dg(t)}{dt}=\frac{10}{9}\frac{d}{dt}\left(e^{-t/10}-e^{-t}\right)=\frac{10}{9}\left(-\frac{1}{10}e^{-t/10}+e^{-t}\right)=0 \Rightarrow \frac{1}{10}e^{-t/10}=e^{-t} \Rightarrow e^{t(1-1/10)}=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t_e=\frac{10}{9}\ln 10 \doteq 2,5$$

Pro hodnotu impulsové charakteristiky v extrémním bodě bude

$$g\left(t_e\right)=\frac{10}{9}\left(e^{-\frac{t_e}{10}}-e^{-t_e}\right)=\frac{10}{9}\left(e^{-\frac{1}{10}\frac{10}{9}\ln 10}-e^{-\frac{10}{9}\ln 10}\right)=\frac{10}{9}\left[\left(e^{\ln 10}\right)^{-\frac{1}{9}}-\left(e^{\ln 10}\right)^{-\frac{10}{9}}\right]=$$

$$=\frac{10}{9}\left[(10)^{-\frac{1}{9}}-(10)^{-\frac{10}{9}}\right]=\frac{10}{9}\left[10^{-\frac{1}{9}}-\left(10^{-\frac{1}{9}}\right)^{10}\right]=\frac{10}{9}10^{-\frac{1}{9}}\left[1-\left(10^{-\frac{1}{9}}\right)^{9}\right]=\frac{10^{\frac{9}{9}-\frac{1}{9}}}{9}\left[1-\left(10^{-\frac{9}{9}}\right)\right]=$$

$$=\frac{10^{\frac{8}{9}}}{9}\left[1-0{,}1\right]=\frac{10^{\frac{8}{9}}}{9}0{,}9=10^{\frac{8}{9}}10^{-1}=10^{-\frac{1}{9}}$$

Pro hodnotu derivace v bodě $t=0$ platí $g'\left(t=0\right)=\frac{10}{9}\left(-\frac{1}{10}+1\right)=\frac{10}{9}\frac{9}{10}=1$

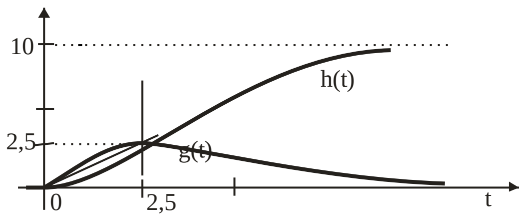
d) Pro přechodovou charakteristiku platí

$$h(t)=\int_0^t g(\tau)\,d\tau=\frac{10}{9}\int_0^t\left(e^{-\frac{\tau}{10}}-e^{-\tau}\right)d\tau=\frac{10}{9}\left[-10e^{-\frac{\tau}{10}}+e^{-\tau}\right]_0^t=\frac{10}{9}\left[-10e^{-\frac{t}{10}}+e^{-t}+10-1\right]$$

$$h(t)=10\left(1-\frac{10}{9}e^{-\frac{t}{10}}+\frac{1}{9}e^{-t}\right)\quad t\ge 0\qquad\qquad h(t)=0\quad t<0$$

Platí $h(0)=0,\ h(\infty)=10$ a protože $dh(t)/dt=g(t)>0\ \ \forall t>0$ je přechodová charakteristika monotónně rostoucí. Pro její derivaci v bodě $t=0$ platí

$$\left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.g(t)\right|_{t=0}=\left.\frac{10}{9}\left(e^{-\frac{t}{10}}-e^{-t}\right)\right|_{t=0}=0$$



3. Je dán periodický diskrétní signál s periodou N=4 a jeho spektrum nabývá hodnot $|c_0| = |c_1| = |c_2| = |c_3| = 0,25 \quad \arg\{c_0\} = \arg\{c_1\} = \arg\{c_2\} = \arg\{c_3\} = 0$. (**15b**)

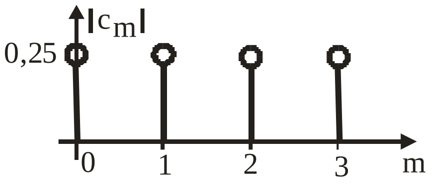
a) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum signálu pro $m = 0,1,2,3$. (**3b**)

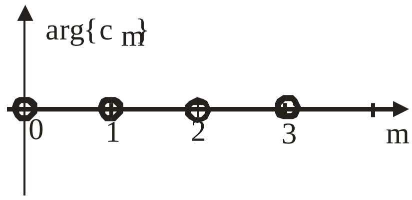
b) Vypočtěte hodnoty signálu pro $k \in (0,12)$ a načrtněte je (**7b**)

c) Vyjádřete tento signál jako superpozici jednotkových impulsů $\delta(k)$ (**5b**)

Řešení:

a) Amplitudové a fázové spektrum signálu





b) Pro diskrétní signál platí Fourierova řada:

$$f(k) = \sum_{m=0}^{3} c_m e^{jm\frac{2\pi}{4}k} = c_0 e^{j0\frac{2\pi}{4}k} + c_1 e^{j1\frac{2\pi}{4}k} + c_2 e^{j2\frac{2\pi}{4}k} + c_3 e^{j3\frac{2\pi}{4}k} = 0,25\left(e^{j0\frac{\pi}{2}k} + e^{j1\frac{\pi}{2}k} + e^{j2\frac{\pi}{2}k} + e^{j3\frac{\pi}{2}k}\right) =$$

$$= 0,25\left[1 + (j)^k + (-1)^k + (-j)^k\right]$$

Pro $k = 0,1,2,3$ bude pro hodnoty signálu platit:

$$f(0) = 0,25\left[1 + (j)^0 + (-1)^0 + (-j)^0\right] = 0,25[1+1+1+1] = 1$$

$$f(1) = 0,25\left[1 + (j)^1 + (-1)^1 + (-j)^1\right] = 0,25[1 + j - 1 - j] = 0$$

$$f(2) = 0,25\left[1 + (j)^2 + (-1)^2 + (-j)^2\right] = 0,25[1 - 1 + 1 - 1] = 0$$

$$f(3) = 0,25\left[1 + (j)^3 + (-1)^3 + (-j)^3\right] = 0,25[1 - j - 1 + j] = 0$$

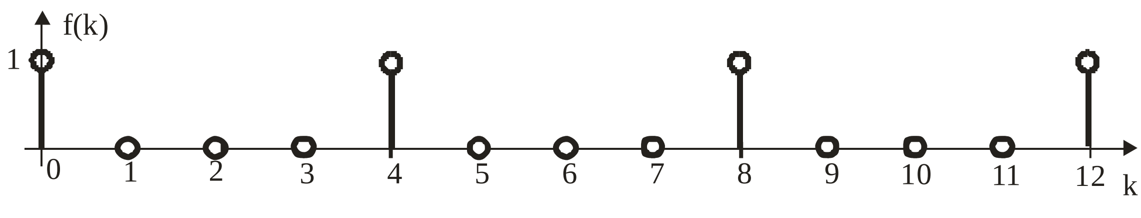
Jelikož je signál periodický s periodou N=4 platí:

$$\ldots = f(-12) = f(-8) = f(-4) = f(0) = f(4) = f(8) = f(12) = \ldots.$$

$$\ldots = f(-11) = f(-7) = f(-3) = f(1) = f(5) = f(9) = f(13) = \ldots.$$

$$\ldots = f(-10) = f(-6) = f(-2) = f(2) = f(6) = f(10) = f(14) = \ldots.$$

$$\ldots = f(-9) = f(-5) = f(-1) = f(3) = f(7) = f(11) = f(15) = \ldots.$$



c) Diskrétní signál lze psát jako $f(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(k - 4i)$

4. Spojitý lineární systém je popsán diferenciální rovnicí $y'(t)+y(t)=u(t)$ kde $y(t)$ je výstup a $u(t)$ je vstup systému. (**20b**)

a) Určete ekvivalentní Z přenos tohoto systému. Vzorkovací perioda $T=\ln 2[\sec]$. (**8b**)

b) Určete diferenční rovnici diskretizovaného systému (**2b**)

c) Vypočtěte impulsní charakteristiku diskretizovaného systému a načrtněte ji pro $k=0,1,2,3$. Popište a ocejchujte osy. (**5b**) Pomůcka: $\exp(\ln 2)=2$

d) Vypočtěte přechodovou charakteristiku diskretizovaného systému a načrtněte ji pro $k=0,1,2,3$. Popište a ocejchujte osy. (**5b**)

e) Porovnejte přechodovou charakteristiku diskretizovaného systému s přechodovou charakteristikou spojitého systému a diskutujte výsledek porovnání.

Řešení

a) Pro operátorový přenos platí $F(p)=1/(p+1)$. Pro přechodovou charakteristiku platí

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}F(p)\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\frac{1}{p+1}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{Ap+A+Bp}{p(p+1)}\right\}\Rightarrow \begin{matrix}A=1\\B=-1\end{matrix}$$

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right\}=1-e^{-t}$$

Navzorkováním bude $h(k)=h(t)\big|_{t=kT}=1-e^{-kT}$. Pro ekvivalentní přenos platí

$$F_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)\mathscr{Z}\{h(k)\}=\frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left\{1-e^{-kT}\right\}=\frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}\right)=1-\frac{z-1}{z-e^{-T}}=\frac{z-e^{-T}-z+1}{z-e^{-T}}$$

$$F_e(z)=\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\qquad T=\ln 2[\sec]\ \Rightarrow\ F_e(z)=\frac{1-e^{-\ln 2}}{z-e^{-\ln 2}}=\frac{1-1/2}{z-1/2}=\frac{1/2}{z-1/2}$$

b) Pro diferenční rovnici platí

$$F_e(z)=\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}=\frac{\left(1-e^{-T}\right)z^{-1}}{1-z^{-1}e^{-T}}=\frac{Y(z)}{U(z)}\ \Rightarrow\ Y(z)\left(1-z^{-1}e^{-T}\right)=\left(1-e^{-T}\right)z^{-1}U(z)\ \Rightarrow$$

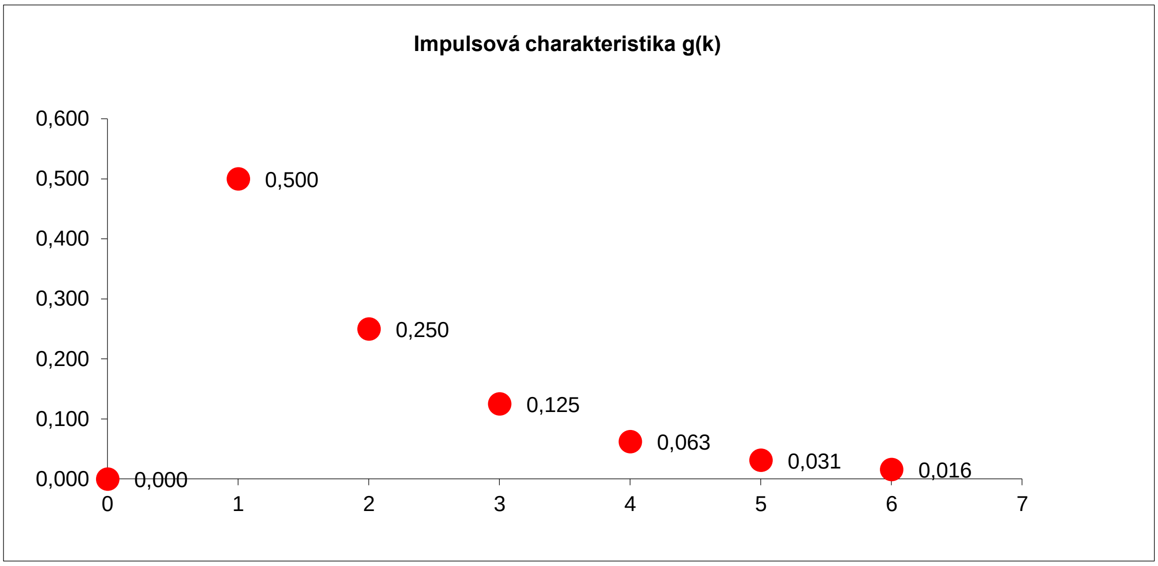
$$y(k)-e^{-T}y(k-1)=\left(1-e^{-T}\right)u(k-1)\quad T=\ln 2\ \Rightarrow\ y(k)-0{,}5y(k-1)=0{,}5u(k-1)$$

c) Pro impulsní charakteristiku platí

$$g(k)=\mathscr{Z}^{-1}\{F_e(z)\}=\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right\}=\left(1-e^{-T}\right)\mathscr{Z}^{-1}\left\{z^{-1}\frac{z}{z-e^{-T}}\right\}=\begin{cases}\left(1-e^{-T}\right)e^{-T(k-1)} & k\ge 1\\ 0 & k<1\end{cases}$$

$$g(k)=\begin{cases}\left(e^{+T}-1\right)e^{-kT} & k\ge 1\\ 0 & k<1\end{cases}\qquad T=\ln 2\ \Rightarrow\ g(k)=\begin{cases}(1/2)^k & k\ge 1\\ 0 & k<1\end{cases}$$

$$g(0)=0;\quad g(1)=1/2;\quad g(2)=1/4;\quad g(3)=1/8;$$



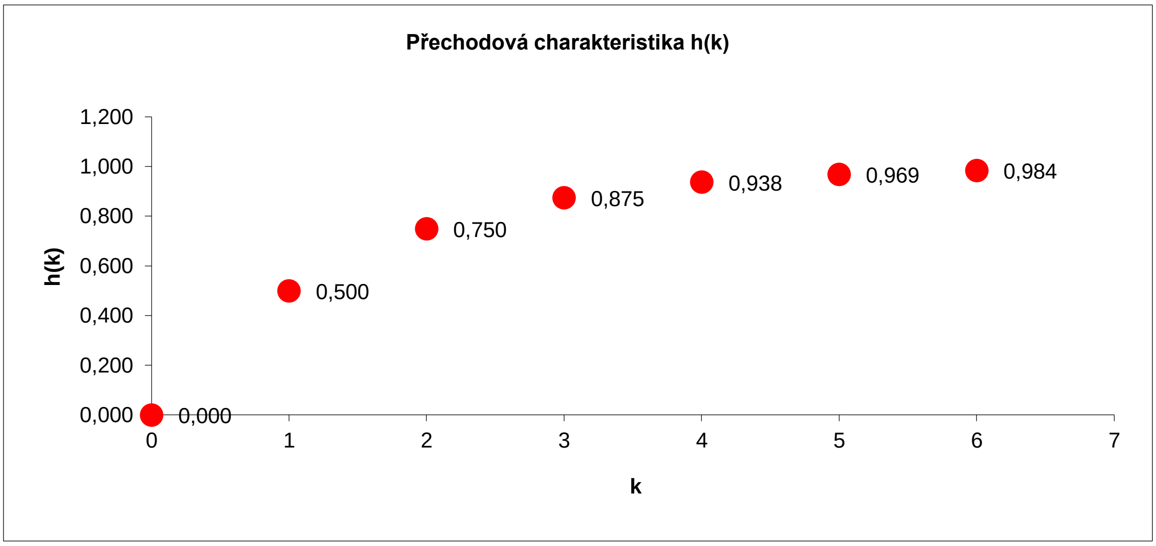
d) Pro přechodovou charakteristiku platí

$$h(k)=\sum_{i=0}^{k} g(i)=\sum_{i=1}^{k}\left(e^{+T}-1\right)e^{-iT}=\left(e^{+T}-1\right)\left[\sum_{i=0}^{k}\left(e^{-T}\right)^{i}-1\right]=\left(e^{+T}-1\right)\left[\frac{1-e^{-T(k+1)}}{1-e^{-T}}-1\right]=$$

$$=e^{+T}\left(1-e^{-T}\right)\left[\frac{1-e^{-T(k+1)}}{1-e^{-T}}-1\right]=e^{+T}\left(1-e^{-T}\right)\frac{1-e^{-T(k+1)}-1+e^{-T}}{1-e^{-T}}=e^{+T}\left[-e^{-T(k+1)}+e^{-T}\right]$$

$$h(k)=\begin{cases}1-e^{-kT} & k\geq 1\\ 0 & k<1\end{cases}\qquad T=\ln 2\quad\Rightarrow\quad h(k)=\begin{cases}1-(1/2)^{k} & k\geq 1\\ 0 & k<1\end{cases}$$

$$h(0)=0;\quad h(1)=1/2;\quad h(2)=3/4;\quad h(3)=7/8;$$



e) Hodnoty přechodové charakteristiky diskretizovaného systému souhlasí v okamžicích vzorkování s hodnotami přechodové charakteristiky spojitého systému.