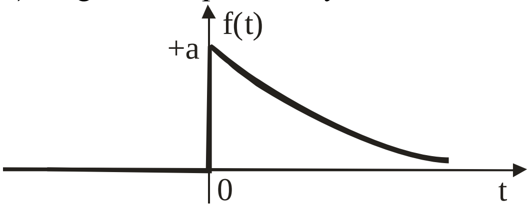
B/KSAS termín2, 20.1.2012	Jméno	ID

1. Je dán spojitý signál $f(t) = ae^{-at}\sigma(t) \quad a > 0$. (**15b**)

a) Rozhodněte, zda je signál periodický (**1b)** a načrtněte ho (**4b**)
b) Vypočtěte jeho spektrum (**5b**)
c) Určete amplitudové spektrum (**2b**) a načrtněte ho (**3b**)

Řešení:

a) Signál není periodický.



b) Pro spektrum signálu platí

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{+\infty} ae^{-at}e^{-j\omega t}dt = a\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = a\left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right]_0^{\infty} = \frac{a}{(a+j\omega)} = \frac{a(a-j\omega)}{a^2+\omega^2}$$

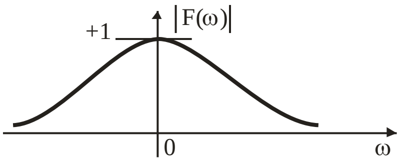
c) Pro amplitudové spektrum platí

$$|F(\omega)| = \left|\frac{a(a-j\omega)}{a^2+\omega^2}\right| = \frac{a\sqrt{a^2+\omega^2}}{a^2+\omega^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

Funkce $F(\omega)$ je sudou funkcí kmitočtu a platí:

$F(0) = \frac{a}{\sqrt{a^2}} = 1 \qquad \lim_{\omega\to\infty} F(\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}} = 0$ a pro $\omega > 0$ je tato funkce monotónně klesající neboť

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\right) = \frac{-a\left(a^2+\omega^2\right)^{-1/2}\omega}{\left(a^2+\omega^2\right)} < 0 \qquad \forall \omega > 0$$



2) Spojitý lineární systém má přechodovou charakteristiku $h(t)=\begin{cases}10\left(t+2e^{-t/2}-2\right) & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$.

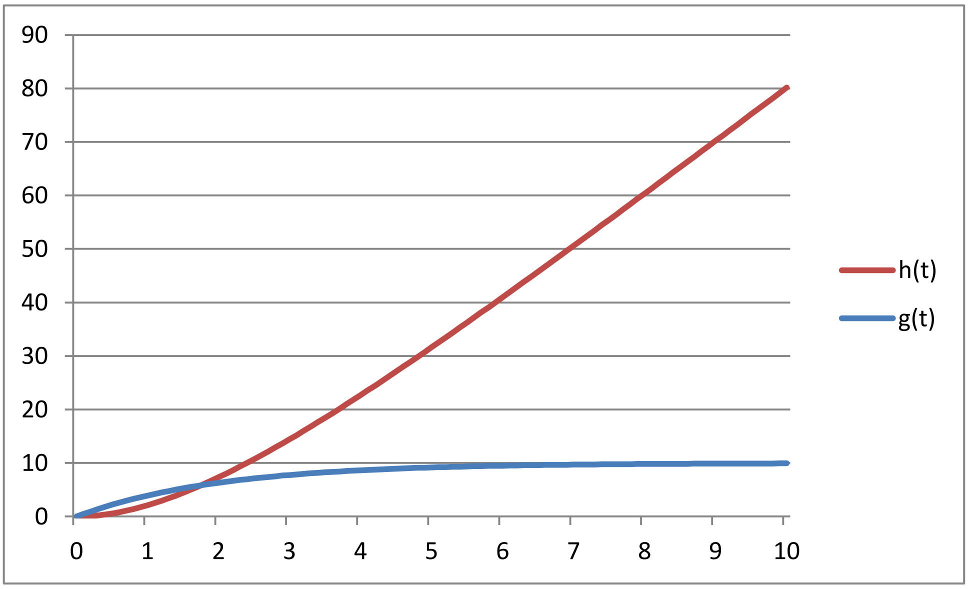
a) Načrtněte přechodovou charakteristiku (**5b**)
b) Určete impulsní charakteristiku systému a načrtněte ji.(**5b**)
c) Určete operátorový přenos systému (**3b**)
d) Načrtněte rozložení pólů a nul (**2b**)
e) Načrtněte asymptotickou amplitudovou (**3b**) a fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Popište a ocejchujte osy. (**2b**)

Řešení

a) $h(0)=0;\ h(\infty)=\infty;$

$$\frac{dh(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[10\left(t+2e^{-t/2}-2\right)\right]=10\left[1+\frac{-2}{2}e^{-t/2}\right]=10\left[1-e^{-t/2}\right]=0 \quad\Rightarrow\quad e^{-t/2}=1 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-t}{2}=\ln 1 \quad\Rightarrow\quad t=0 \quad\Rightarrow\quad \textit{funkce má extrém v bodě } t=0$$



b) Pro impulsní charakteristiku platí

$$g(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[10\left(t+2e^{-t/2}-2\right)\right]=10\left[1+\frac{-2}{2}e^{-t/2}\right]=10\left[1-e^{-t/2}\right]$$

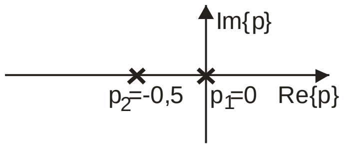
$$g(0)=0;\ g(\infty)=10$$

c) Pro operátorový přenos platí

$$F(p)=\mathscr{L}\{g(t)\}=\mathscr{L}\left\{10\left(1-e^{-t/2}\right)\right\}=10\mathscr{L}\{\sigma(t)\}-10\mathscr{L}\left\{e^{-t/2}\right\}=\frac{10}{p}-\frac{10}{p+1/2}=$$

$$=\frac{10}{p}-\frac{20}{2p+1}=\frac{20p+10-20p}{p(2p+1)}=\frac{10}{p(2p+1)}$$

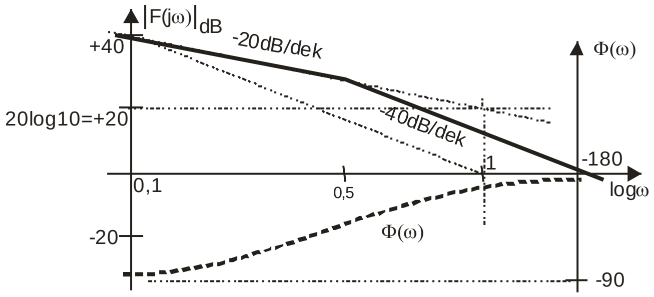
d) Systém má 2 póly $p_1 = 0, p_2 = -0,5$ a žádnou nulu.



e) Pro frekvenční přenos platí

$$\left|F\left(j\omega\right)\right| = \left|\frac{10}{j\omega\left(2j\omega+1\right)}\right| = \frac{10}{\omega\sqrt{4\omega^2+1}}$$

$$\varphi\left(\omega\right) = -\pi/2 - \operatorname{arctan} 2\omega, \quad \varphi\left(0\right) = -\pi/2, \varphi\left(\infty\right) = -\pi$$

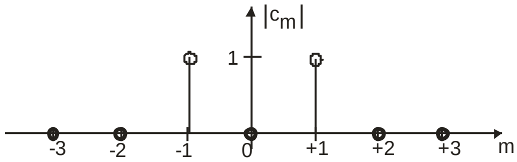


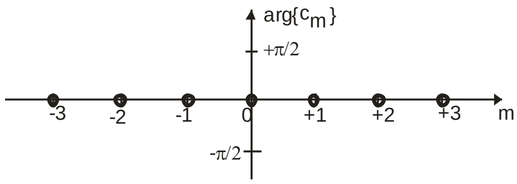
3. Hodnoty koeficientů spektra diskrétního periodického signálu s periodou $N=8$ jsou $c_{-1}=1, c_{+1}=1$ a ostatní koeficienty jsou nulové. **(15b)**

a) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum. Popište a ocejchujte osy (**4b**)
b) Vypočtěte tento diskrétní signál (**6b**)
c) Načrtněte jednu periodu signálu. Popište a ocejchujte osy. (**5b**)

Řešení:

a) Platí $|c_{-1}|=|1|=1, \arg\{c_{-1}\}=0, \quad |c_{+1}|=|1|=1, \arg\{c_{+1}\}=0$





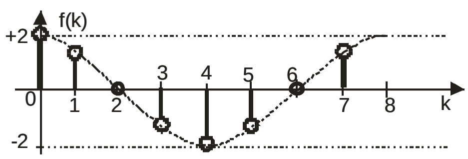
b) Vzhledem k tomu, že i spektrum je periodické s periodou N lze v inverzní DFŘ sčítat od libovolného indexu počínaje tj.

$$f(k)=\sum_{m=0}^{8-1} c_m e^{jm\frac{2\pi}{8}k} = \sum_{m=-1}^{8-2} c_m e^{jm\frac{2\pi}{8}k} = c_{-1}e^{j(-1)\frac{2\pi}{8}k} + c_0 e^{j(0)\frac{2\pi}{8}k} + c_{+1}e^{j(+1)\frac{2\pi}{8}k} + ..+ c_{+5}e^{j(+5)\frac{2\pi}{8}k} + c_{+6}e^{j(+6)\frac{2\pi}{8}k}$$

Je zřejmé, že z celé této řady jsou nenulové jen koeficienty $c_{-1}=1, c_{+1}=1$ a ostatní koeficienty jsou nulové. Proto

$$f(k)=c_{-1}e^{j(-1)\frac{2\pi}{N}k} + c_{+1}e^{j(+1)\frac{2\pi}{N}k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} + e^{+j\frac{2\pi}{N}k} = 2\frac{e^{+j\frac{2\pi}{N}k} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{N}k$$

c) Obrázek jedné periody vzorkovaného signálu:



4. Spojitý systém má impulsní charakteristiku $g(t)=\begin{cases} e^{-\frac{t}{3}}/3-e^{-\frac{t}{4}}/4 & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$. (**20b**)

d) Vypočtěte jeho operátorový přenos (**2b**)
e) Vypočtěte jeho přechodovou charakteristiku (**4b**) a načrtněte ji (**4b**).
f) Určete ekvivalentní přenos systému pro vzorkovací periodu T. (**6b**)
g) Na vstupu diskretizovaného systému působí posloupnost $u(k)=\sigma(k)$. Určete ustálenou hodnou výstupní posloupnosti. (**4b**) **Pomůcka**: $\lim\limits_{k\to\infty} y(k)=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)Y(z)$

Řešení

a. Pro operátorový přenos platí:

$$F(p)=\mathrm{L}\{g(t)\}=\mathrm{L}\left\{e^{-\frac{t}{3}}/3-e^{-\frac{t}{4}}/4\right\}=\frac{1}{3}\mathrm{L}\left\{e^{-\frac{t}{3}}\right\}-\frac{1}{4}\mathrm{L}\left\{e^{-\frac{t}{4}}\right\}=\frac{1/3}{p+1/3}-\frac{1/4}{p+1/4}=\frac{1}{3p+1}-\frac{1}{4p+1}=$$

$$=\frac{4p+1-3p-1}{(3p+1)(4p+1)}=\frac{p}{(3p+1)(4p+1)}$$

b.

$$h(t)=\int_0^t g(\tau)d\tau=\int_0^t\left(e^{-\frac{t}{3}}/3-e^{-\frac{t}{4}}/4\right)d\tau=\frac{1}{3}\int_0^t\left(e^{-\frac{\tau}{3}}\right)d\tau-\frac{1}{4}\int_0^t\left(e^{-\frac{\tau}{4}}\right)d\tau=\frac{1}{3}(-3)\left[e^{-\frac{\tau}{3}}\right]_0^t-\frac{1}{4}(-4)\left[e^{-\frac{\tau}{4}}\right]_0^t=$$

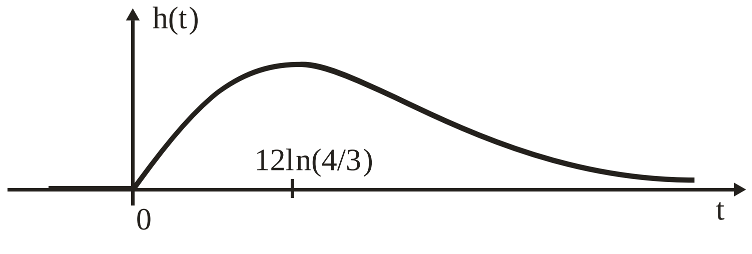
$$=-\left(e^{-\frac{t}{3}}-1\right)+\left(e^{-\frac{t}{4}}-1\right)=e^{-\frac{t}{4}}-e^{-\frac{t}{3}}\quad t\geq 0,\quad h(t)=0\quad t<0$$

Pro průběh přechodové charakteristiky platí $h(0)=0\quad h(\infty)=0$. Pro extrémy platí

$$h'(t)=g(t)=-\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}+\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}=\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}\quad\Rightarrow\quad e^{\frac{t}{3}}e^{-\frac{t}{4}}=\frac{4}{3}\quad\Rightarrow e^{\frac{t}{12}}=\frac{4}{3}\quad\Rightarrow t=12\ln\frac{4}{3}>0$$

a přechodová charakteristika má jen jeden extrém, a to na kladné ose času. Dále je zřejmé, že $h(t)>0\quad t\in(0,+\infty)$ a tedy hodnota extrému musí být kladná. Pro směrnici $h(t)$ v počátku platí

$$h'(t=0)=g(0)=\left[-\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}+\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}\right]_{t=0}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}>0$$. Proto:



h) Vzorkováním přechodové charakteristiky s periodou T obdržíme:

$$h(kT)=h(t)\big|_{t=kT}=e^{-\frac{kT}{4}}-e^{-\frac{kT}{3}}=\left(e^{-\frac{T}{4}}\right)^k-\left(e^{-\frac{T}{3}}\right)^k$$. Pro Z obraz této posloupnosti bude platit:

$$\mathcal{Z}\{h(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{T}{4}}\right)^k z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{T}{3}}\right)^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(z^{-1}e^{-\frac{T}{4}}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\left(z^{-1}e^{-\frac{T}{3}}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}e^{-\frac{T}{4}}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-\frac{T}{3}}} = \frac{z}{z-e^{-\frac{T}{4}}} - \frac{z}{z-e^{-\frac{T}{3}}}$$

Pro ekvivalentní Z přenos diskretizovaného systému pak platí:

$$F_e(z) = \frac{z-1}{z} H(z) = \frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{z-e^{-T/4}} - \frac{z}{z-e^{-T/3}}\right] = \frac{z-1}{z-e^{-T/4}} - \frac{z-1}{z-e^{-T/3}}$$

d) Pro ustálenou hodnotu bude platit

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-1}F_e(z) = \lim_{z\to 1} zF_e(z) = \lim_{z\to 1} z\left[\frac{z-1}{z-e^{-T/4}} - \frac{z-1}{z-e^{-T/3}}\right] = 0$$