B/KSAS- termín 1, sk.B, 12.1.2012	Jméno	ID

1. Je dán spojitý signál $f(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \sin(m\Omega t)$ (**15b**).

a) Prověřte, zda se jedná o signál periodický nebo neperiodický. (**2b**).

b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu (**5b**)

c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum pro $m = 0, 1, 2, \ldots N$. (**4b**)

d) Určete nejmenší vzorkovací kmitočet takový, aby při vzorkování nedošlo ke ztrátě informace. (**4b**)

Řešení

a) Aby byl signál periodický musí platit $f(t) = f(t + kT), k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Nejmenší takové T, pro které to platí se nazývá základní perioda.

$$f(t + kT) = \sum_{m=0}^{N-1} \sin\left[m\Omega(t + kT)\right] = \sum_{m=0}^{N-1} \sin\left[m(\Omega t + kT\Omega)\right]$$

Aby platilo $f(t) = f(t + kT), k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ musí být $kT\Omega = k2\pi \Rightarrow T = 2\pi / \Omega$. Signál je periodický s periodou $T = 2\pi / \Omega$.

b) Pro signál platí:

$$f(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \sin(m\Omega t) = 0 + \sum_{m=1}^{N-1} \sin(m\Omega t) = 0 + \sum_{m=+1}^{N-1} \left[\frac{1}{2j} e^{+jm\Omega t} - \frac{1}{2j} e^{-jm\Omega t}\right] =$$

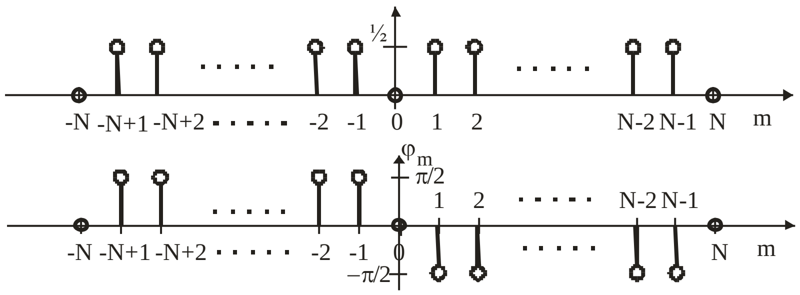
$$= c_0 e^{+j0\Omega t} + \sum_{m=+1}^{N-1} \left[c_m e^{+jm\Omega t} + c_{-m} e^{-jm\Omega t}\right] = \sum_{m=-N+1}^{-1} c_m e^{+jm\Omega t} + c_0 e^{+j0\Omega t} + \sum_{m=+1}^{N-1} c_m e^{+jm\Omega t}$$

Odtud je zřejmé, že koeficienty spektra jsou

$c_0 = 0; c_m = -j/2; c_{-m} = j/2; \quad m = 1, 2, \ldots N-1$. Ostatní koeficienty spektra jsou nulové.

Rozdíl kmitočtů mezi dvěma sousedními čarami spektra je $\Omega[rad/\sec]$

c) Viz obr.



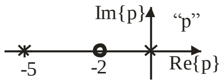
d) Vzhledem k tomu, že maximální kmitočet ve spektru signálu je roven $(N-1)\Omega$ musí pro vzorkovací kmitočet platit $\omega_{s\min} > 2(N-1)\Omega$

2. Spojitý lineární systém bez dopravního zpoždění má jednu nulu $n_1 = -2$ a dva póly, z toho jeden jednoduchý $p_1 = 0$ a jeden dvojnásobný $p_{2,3} = -5$ a poměr koeficientů u nejvyšších mocnin čitatele a jmenovatele operátorového přenosu je 125. (**20 b**)

   a) Načrtněte rozložení pólů a nul (**2b**)
   b) Určete operátorový přenos systému (**5b**)
   c) Určete jeho diferenciální rovnici (**3b**)
   d) Načrtněte asymptotickou amplitudovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích (**5b**)
   e) Na vstup systému působí harmonický signál $u(t) = U_0 e^{jt}$ kde $U_0 = 0{,}1$. Určete amplitudu výstupního harmonického signálu po odeznění přechodových dějů. (**5b**)

Řešení

a) Rozložení PaN



b) Operátorový přenos je tvaru $F(p) = \dfrac{125(p-n_1)}{p(p-p_2)^2}$.

Označme $n_1 = -2 = -1/T_1;\ p_2 = -5 = -1/T_2$, tedy $T_1 = 0{,}5, T_2 = 0{,}2$.

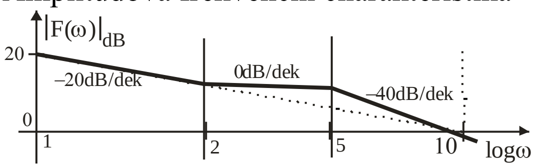
$$F(p) = \frac{125(p+1/T_1)\,p}{p(p+1/T_2)^2} = \frac{T_2^2}{T_1}\frac{125(T_1 p+1)}{p(T_2 p+1)^2} = \frac{0{,}04}{0{,}5}\frac{125(0{,}5p+1)}{p(0{,}2p+1)^2} = \frac{10(0{,}5p+1)}{p(0{,}2p+1)^2}$$

c) Pro diferenciální rovnici platí:

$$F(p) = \frac{10(0{,}5p+1)}{p(0{,}2p+1)^2} = \frac{10(0{,}5p+1)}{p(0{,}04p^2+0{,}4p+1)} = \frac{5p+10}{0{,}04p^3+0{,}4p^2+p} = \frac{Y(p)}{U(p)} \Rightarrow$$

$$Y(p)(0{,}04p^3+0{,}4p^2+p) = (5p+10)U(p) \quad \Rightarrow \quad 0{,}04y''' + 0{,}4y'' + y' = 5u' + 10u$$

d) Amplitudová frekvenční charakteristika



e) Pro absolutní hodnotu frekvenčního přenosu platí

$$|F(j\omega)| = |F(p=j\omega)| = \left|\frac{10(0{,}5j\omega+1)}{j\omega(0{,}2j\omega+1)^2}\right| = \frac{10\sqrt{0{,}25\omega^2+1}}{|\omega|(0{,}04\omega^2+1)}$$

Pro amplitudu výstupního harmonického signálu bude platit:

$$A = U_0 |F(j\omega)|_{\omega=1} = 0{,}1\frac{10\sqrt{0{,}25+1}}{(0{,}04+1)} = \frac{\sqrt{1{,}25}}{1{,}04}$$

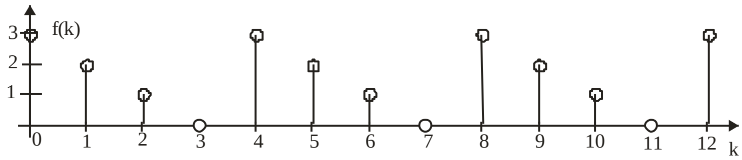
3. Je dán diskrétní signál $f(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(k+4i) \quad i=0,\pm1,\pm2...$ kde $g(k)=\sum_{n=0}^{3}(3-n)\delta(k-n)$ **(15b)**

a) Načrtněte hodnoty signálu pro $k=0,1,2,...12$. Ocejchujte osy. (**4b**)
b) Je tento signál periodický? Pokud ano, určete jeho periodu. (**3b**)
c) Vypočtěte spektrum tohoto signálu. (**4b**)
d) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum tohoto signálu. Ocejchujte osy. (**4b**)

Řešení

a) Pro signál $g(k)$ platí:

$g(k)=(3-0)\delta(k-0)+(3-1)\delta(k-1)+(3-2)\delta(k-2)+(3-3)\delta(k-3)$ a jeho ostatní hodnoty jsou nulové. Signál $f(k)$ je periodickým opakováním $g(k)$ s periodou $N=4$



b) Z obrázku je patrno, že signál je periodický a má periodu $N=4$.

c) Pro výpočet koeficientů diskrétní Fourierovy řady platí

$$c_m=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{4}k}=\frac{1}{4}\left[f(0)e^{-jm\frac{2\pi}{4}0}+f(1)e^{-jm\frac{2\pi}{4}1}f(2)e^{-jm\frac{2\pi}{4}2}+f(3)e^{-jm\frac{2\pi}{4}3}\right] \quad m=0,1,2,3$$

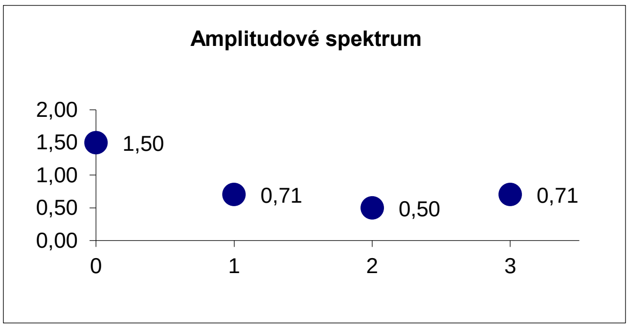
$$.c_m=\frac{1}{4}\left[f(0)e^{-jm\frac{2\pi}{4}0}+f(1)e^{-jm\frac{2\pi}{4}1}f(2)e^{-jm\frac{2\pi}{4}2}+f(3)e^{-jm\frac{2\pi}{4}3}\right]=\frac{1}{4}\left[3e^{-jm\frac{2\pi}{4}0}+2e^{-jm\frac{\pi}{2}1}1e^{-jm\frac{\pi}{2}2}\right]$$

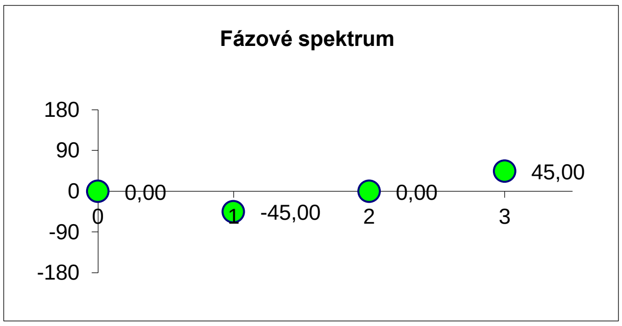
$$c_0=\frac{1}{4}\left[3e^{-j0\frac{\pi}{2}0}+2e^{-j0\frac{\pi}{2}1}+1e^{-j0\frac{\pi}{2}2}\right]=\frac{1}{4}[3+2+1]=\frac{3}{2}=1,5$$

$$c_1=\frac{1}{4}\left[3e^{-j1\frac{\pi}{2}0}+2e^{-j1\frac{\pi}{2}1}+1e^{-j1\frac{\pi}{2}2}\right]=\frac{1}{4}[3-2j-1]=\frac{2-2j}{4}=\frac{1-j}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$c_2=\frac{1}{4}\left[3e^{-j2\frac{\pi}{2}0}+2e^{-j2\frac{\pi}{2}1}+1e^{-j2\frac{\pi}{2}2}\right]=\frac{1}{4}[3-2+1]=\frac{2}{4}=0,5$$

$$c_3=\frac{1}{4}\left[3e^{-j3\frac{\pi}{2}0}+2e^{-j3\frac{\pi}{2}1}+1e^{-j3\frac{\pi}{2}2}\right]=\frac{1}{4}[3+2j-1]=\frac{2+2j}{4}=\frac{1+j}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{+j\frac{\pi}{4}}$$





4. Pro impulsní charakteristiku diskrétního systému platí

$$g(k)=\begin{cases}2(-0{,}8)^k-(-0{,}4)^k & k\ge 0\\ 0 & k<0\end{cases}\qquad \textbf{(20b)}\qquad \textbf{Pomůcka: } \sum_{i=0}^{n-1} q^i=\left(1-q^n\right)/\left(1-q\right)$$

a) Vypočtěte operátorový přenos celého systému (**5b**)
b) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. (**4b**)
c) Vypočtěte analyticky přechodovou charakteristiku systému $h(k),\forall k$. Vypočtěte numericky hodnotu $h(0)$. (**6b**)
d) Určete diferenční rovnici celého systému. Vypočtěte hodnotu $h(0)$ pomocí diferenční rovnice a srovnejte s výsledkem podle bodu c). (**3b**)
e) Rozhodněte o stabilitě celého systému, zdůvodněte. (**2b**)

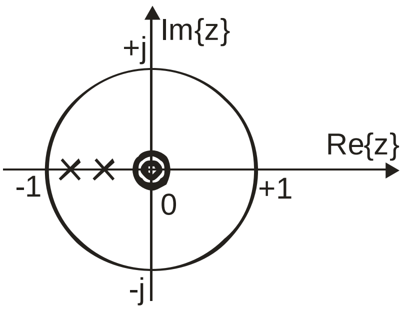
Řešení:

a) Platí

$$F(z)=\mathcal{Z}\{g(k)\}=\mathcal{Z}\left\{2(-0{,}8)^k-(-0{,}4)^k\right\}=2\mathcal{Z}\left\{(-0{,}8)^k\right\}-\mathcal{Z}\left\{(-0{,}4)^k\right\}=$$

$$=\frac{2z}{z+0{,}8}-\frac{z}{z+0{,}4}=\frac{2z^2+0{,}8z-z^2-0{,}8z}{(z+0{,}8)(z+0{,}4)}=\frac{z^2}{(z+0{,}8)(z+0{,}4)}=\frac{z^2}{z^2+1{,}2z+0{,}32}$$

b) Systém má dva póly $z_1=-0{,}4;\ z_2=-0{,}8$ a jednu dvojnásobnou nulu $n_1=n_2=0$.



c) Pro přechodovou charakteristiku platí pro $k\ge 0$ (pro $k<0$ je $h(k)=0$)

$$h(k)=\sum_{i=0}^{k} g(k)=\sum_{i=0}^{k}\left[2(-0{,}8)^i-(-0{,}4)^i\right]=2\sum_{i=0}^{k}(-0{,}8)^i-\sum_{i=0}^{k}(-0{,}4)^i=2\frac{1-(-0{,}8)^{k+1}}{1-(-0{,}8)}-\frac{1-(-0{,}4)^{k+1}}{1-(-0{,}4)}=$$

$$=2\frac{1-(-0{,}8)^{k+1}}{1{,}8}-\frac{1-(-0{,}4)^{k+1}}{1{,}4}=2\frac{1+0{,}8(-0{,}8)^k}{1{,}8}-\frac{1+0{,}4(-0{,}4)^k}{1{,}4}$$

$$h(0)=2\frac{1-(-0{,}8)^{0+1}}{1{,}8}-\frac{1-(-0{,}4)^{0+1}}{1{,}4}=2\frac{1+0{,}8}{1{,}8}-\frac{1+0{,}4}{1{,}4}=2-1=1$$

d) Pro diferenční rovnici platí

$$F(z)=\frac{z^2}{z^2+1{,}2z+0{,}32}=\frac{1}{1+1{,}2z^{-1}+0{,}32z^{-2}}=\frac{Y(z)}{U(z)}\quad\Rightarrow\quad Y(z)\left(1+1{,}2z^{-1}+0{,}32z^{-2}\right)=U(z)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(k)+1{,}2y(k-1)+0{,}32y(k-2)=u(k)\quad\Rightarrow\quad y(k)=-1{,}2y(k-1)-0{,}32y(k-2)+u(k)$$

$$k=0\quad y(0)=-1{,}2y(0-1)-0{,}32y(0-2)+u(0)=0-0+1=1$$

e) Oba póly systému leží uvnitř jednotkové kružnice, a proto je systém stabilní.