B/KSAS- termín 1, sk.A, 12.1.2012	Jméno	ID

1. Je dán spojitý signál $f(t)=\sum_{m=0}^{N-1}\cos(m\Omega t)$ (**15b**).

a) Prověřte, zda se jedná o signál periodický nebo neperiodický. (**2b**).

b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu (**5b**)

c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum pro $m=0,1,2,...N$. (**4b**)

d) Určete nejmenší vzorkovací kmitočet takový, aby při vzorkování nedošlo ke ztrátě informace. (**4b**)

Řešení

a) Aby byl signál periodický musí platit $f(t)=f(t+kT), k=\pm1,\pm2,...$ Nejmenší takové T, pro které to platí se nazývá základní perioda.

$$f(t+kT)=\sum_{m=0}^{N-1}\cos\left[m\Omega(t+kT)\right]=\sum_{m=0}^{N-1}\cos\left[m(\Omega t+kT\Omega)\right]$$

Aby platilo $f(t)=f(t+kT), k=\pm1,\pm2,...$ musí být $kT\Omega=k2\pi \Rightarrow T=2\pi/\Omega$. Signál je periodický s periodou $T=2\pi/\Omega$.

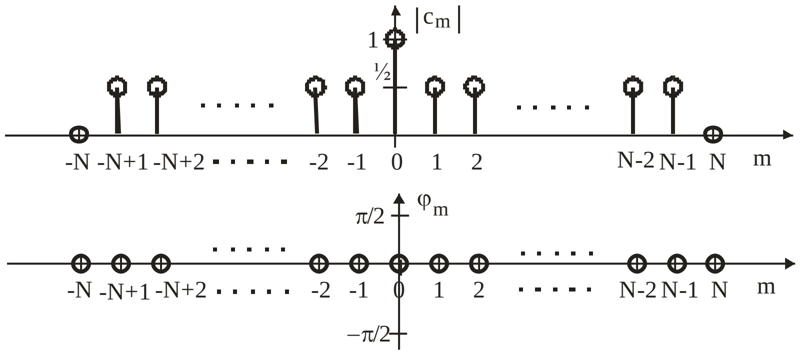
b) Pro signál platí:

$$f(t)=\sum_{m=0}^{N-1}\cos(m\Omega t)=1+\sum_{m=1}^{N-1}\cos(m\Omega t)=1+\sum_{m=+1}^{N-1}\left[\frac{1}{2}e^{+jm\Omega t}+\frac{1}{2}e^{-jm\Omega t}\right]=$$

$$=c_0e^{+j0\Omega t}+\sum_{m=+1}^{N-1}\left[c_m e^{+jm\Omega t}+c_{-m}e^{-jm\Omega t}\right]=\sum_{m=-N+1}^{-1}c_m e^{+jm\Omega t}+c_0e^{+j0\Omega t}+\sum_{m=+1}^{N-1}c_m e^{+jm\Omega t}$$

Odtud je zřejmé, že koeficienty spektra jsou $c_0=1; c_m=c_{-m}=1/2; \quad m=1,2,...N-1$**.** Ostatní koeficienty spektra jsou nulové. Rozdíl kmitočtů mezi dvěma sousedními čarami spektra je $\Omega[rad/\sec]$

c) Viz obr.



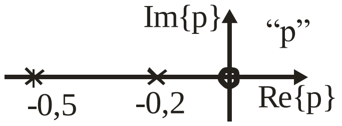
d) Vzhledem k tomu, že maximální kmitočet ve spektru signálu je roven $(N-1)\Omega$ musí pro vzorkovací kmitočet platit $\omega_{s\min}>2(N-1)\Omega$

2. Spojitý lineární systém bez dopravního zpoždění má jednu nulu $n_1 = 0$ a dva póly, z toho jeden jednoduchý $p_1 = -0{,}2$ a jeden dvojnásobný $p_{2,3} = -0{,}5$ a poměr koeficientů u nejvyšších mocnin čitatele a jmenovatele operátorového přenosu je 0,5. (**20 b**)

   a) Načrtněte rozložení pólů a nul (**2b**)
   b) Určete operátorový přenos systému (**5b**)
   c) Určete jeho diferenciální rovnici (**3b**)
   d) Načrtněte asymptotickou amplitudovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích (**5b**)
   e) Na vstup systému působí harmonický signál $u(t) = U_0 e^{jt}$ kde $U_0 = 0{,}1$. Určete amplitudu výstupního harmonického signálu po odeznění přechodových dějů. (**5b**)

Řešení

a) Rozložení PaN



b) Operátorový přenos je tvaru $F(p) = \dfrac{0{,}5(p-n_1)}{(p-p_1)(p-p_2)^2}$.

Označme $p_1 = -1/T_1 = -1/5;\ p_2 = -1/T_2 = -1/2$, tedy $T_1 = 5, T_2 = 2$.

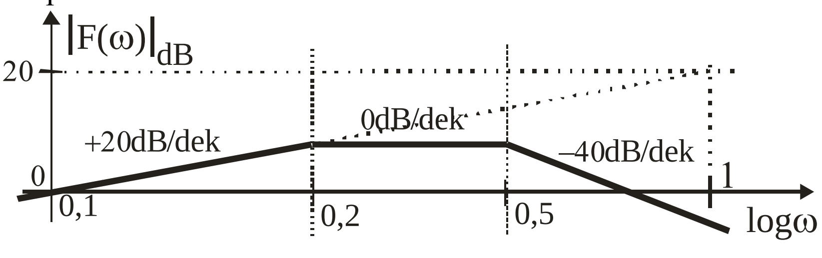
$$F(p) = \frac{0{,}5p}{(p+1/T_1)(p+1/T_2)^2} = \frac{T_1T_2^2\,0{,}5p}{(T_1p+1)(T_2p+1)^2} = \frac{10p}{(5p+1)(2p+1)^2}$$

c) Pro operátorový přenos platí:

$$F(p) = \frac{10p}{(5p+1)(2p+1)^2} = \frac{10p}{(5p+1)(4p^2+4p+1)} = \frac{10p}{20p^3+24p^2+9p+1} = \frac{Y(p)}{U(p)} \Rightarrow$$

$$Y(p)(20p^3+24p^2+9p+1) = 10pU(p) \quad \Rightarrow \quad 20y''' + 24y'' + 9y' + y = 10u'$$

d) Amplitudová frekvenční charakteristika



e) Pro absolutní hodnotu frekvenčního přenosu platí

$$|F(j\omega)| = |F(p=j\omega)| = \left|\frac{10j\omega}{(5j\omega+1)(2j\omega+1)^2}\right| = \frac{10\omega}{\sqrt{25\omega^2+1}(4\omega^2+1)}$$

Pro amplitudu výstupního harmonického signálu bude platit:

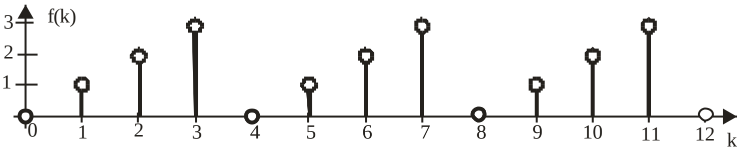
$$A = U_0 |F(j\omega)|_{\omega=1} = 0{,}1\frac{10}{\sqrt{25+1}(4+1)} = \frac{1}{5\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{130}$$

3. Je dán diskrétní signál $f(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(k+4i)\quad i=0,\pm1,\pm2...$ kde $g(k)=\sum_{n=0}^{3} n\delta(k-n)$ **(15b)**

a) Načrtněte hodnoty signálu pro $k=0,1,2,...12$. Ocejchujte osy. (**4b**)
b) Je tento signál periodický? Pokud ano, určete jeho periodu. (**3b**)
c) Vypočtěte spektrum tohoto signálu. (**4b**)
d) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum tohoto signálu. Ocejchujte osy. (**4b**)

Řešení

a) Pro signál $g(k)$ platí: $g(k)=0\delta(k-0)+1\delta(k-1)+2\delta(k-2)+3\delta(k-3)$ a jeho ostatní hodnoty jsou nulové. Signál $f(k)$ je periodickým opakováním $g(k)$ s periodou $N=4$



b) Z obrázku je patrno, že signál je periodický a má periodu $N=4$.

c) Pro výpočet koeficientů diskrétní Fourierovy řady platí

$$c_m=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{4}k}=\frac{1}{4}\left[f(0)e^{-jm\frac{2\pi}{4}0}+f(1)e^{-jm\frac{2\pi}{4}1}f(2)e^{-jm\frac{2\pi}{4}2}+f(3)e^{-jm\frac{2\pi}{4}3}\right]\quad m=0,1,2,3$$

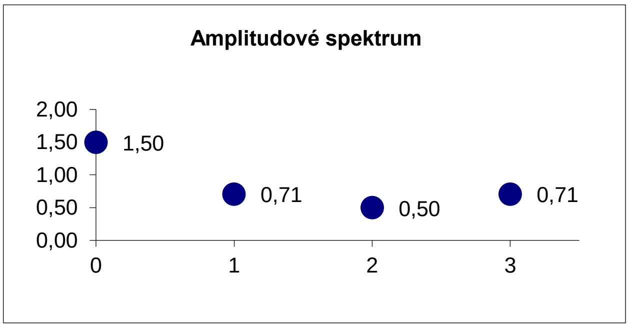
$$.c_m=\frac{1}{4}\left[f(0)e^{-jm\frac{2\pi}{4}0}+f(1)e^{-jm\frac{2\pi}{4}1}f(2)e^{-jm\frac{2\pi}{4}2}+f(3)e^{-jm\frac{2\pi}{4}3}\right]=\frac{1}{4}\left[1e^{-jm\frac{\pi}{2}1}2e^{-jm\frac{\pi}{2}2}+3e^{-jm\frac{\pi}{2}3}\right]$$

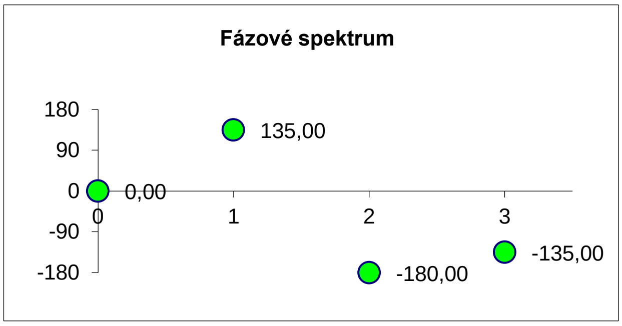
$$c_0=\frac{1}{4}\left[1e^{-j0\frac{\pi}{2}1}+2e^{-j0\frac{\pi}{2}2}+3e^{-j0\frac{\pi}{2}3}\right]=\frac{1}{4}[1+2+3]=\frac{3}{2}=1{,}5$$

$$c_1=\frac{1}{4}\left[1e^{-j1\frac{\pi}{2}1}+2e^{-j1\frac{\pi}{2}2}+3e^{-j1\frac{\pi}{2}3}\right]=\frac{1}{4}[-j-2+3j]=2\frac{-1+j}{4}=\frac{-1+j}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

$$c_2=\frac{1}{4}\left[1e^{-j2\frac{\pi}{2}1}+2e^{-j2\frac{\pi}{2}2}+3e^{-j2\frac{\pi}{2}3}\right]=\frac{1}{4}[-1+2-3]=-\frac{1}{2}=-0{,}5$$

$$c_3=\frac{1}{4}\left[1e^{-j3\frac{\pi}{2}1}+2e^{-j3\frac{\pi}{2}2}+3e^{-j3\frac{\pi}{2}3}\right]=\frac{1}{4}[+j-2-3j]=\frac{-2-2j}{4}=\frac{-1-j}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$





4. Pro impulsní charakteristiku diskrétního systému platí

$$g(k)=\begin{cases} 0,5^k+0,8^k & k\geq 0 \\ 0 & k<0 \end{cases} \quad \textbf{(20b)} \qquad \textbf{Pomůcka: } \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \left(1-q^n\right)/\left(1-q\right)$$

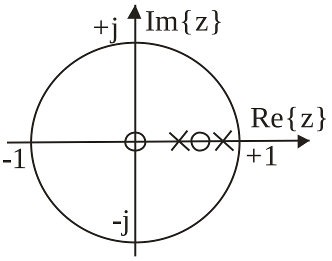
a) Vypočtěte operátorový přenos celého systému (**5b**)
b) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. (**4b**)
c) Vypočtěte analyticky přechodovou charakteristiku systému $h(k), \forall k$. Vypočtěte numericky hodnotu $h(0)$. (**6b**)
d) Určete diferenční rovnici celého systému. Vypočtěte hodnotu $h(0)$ pomocí diferenční rovnice a srovnejte s výsledkem podle bodu c). (**3b**)
e) Rozhodněte o stabilitě celého systému, zdůvodněte. (**2b**)

Řešení:
a) Platí

$$F(z)=\mathcal{Z}\{g(k)\}=\mathcal{Z}\left\{0,5^k+0,8^k\right\}=\mathcal{Z}\left\{0,5^k\right\}+\mathcal{Z}\left\{0,8^k\right\}=\frac{z}{z-0,5}+\frac{z}{z-0,8}=$$

$$=z\frac{z-0,5+z-0,8}{(z-0,5)(z-0,8)}=z\frac{2z-1,3}{(z-0,5)(z-0,8)}=\frac{2z(z-0,65)}{(z-0,5)(z-0,8)}=\frac{2z^2-1,3z}{z^2-1,3z+0,4}$$

b) Systém má dva póly $z_1=0,5; z_2=0,8$ a dvě nuly $n_1=0; n_2=0,65$.



c) Pro přechodovou charakteristiku platí

$$h(k)=\sum_{i=0}^{k} g(i)=\sum_{i=0}^{k}\left[0,5^k+0,8^k\right]=\sum_{i=0}^{k}0,5^k+\sum_{i=0}^{k}0,8^k=\frac{1-0,5^{k+1}}{1-0,5}+\frac{1-0,8^{k+1}}{1-0,8}=$$

$$=\frac{1-0,5^{k+1}}{0,5}+\frac{1-0,8^{k+1}}{0,2}=2\left(1-0,5.0,5^k\right)+5\left(1-0,8.0,8^k\right)=7-0,5^k-4\left(0,8^k\right)$$

$$h(k)=7-0,5^k-4\left(0,8^k\right) \quad \Rightarrow \quad h(0)=7-0,5^0-4\left(0,8^0\right)=7-1-4=2$$

d) Pro diferenční rovnici platí

$$F(z)=\frac{2z^2-1,3z}{z^2-1,3z+0,4}=\frac{2-1,3z^{-1}}{1-1,3z^{-1}+0,4z^{-2}}=\frac{Y(z)}{U(z)} \quad \Rightarrow$$

$$Y(z)\left(1-1,3z^{-1}+0,4z^{-2}\right)=U(z)\left(2-1,3z^{-1}\right)\Rightarrow$$

$$y(k)-1,3y(k-1)+0,4y(k-2)=2u(k)-1,3u(k-1) \quad \Rightarrow$$

$$y(k)=1,3y(k-1)-0,4y(k-2)+2u(k)-1,3u(k-1)$$

$$y(0)=1,3y(0-1)-0,4y(0-2)+2u(0)-1,3u(0-1)=2$$

e) Oba póly systému leží uvnitř jednotkové kružnice, a proto je systém stabilní.