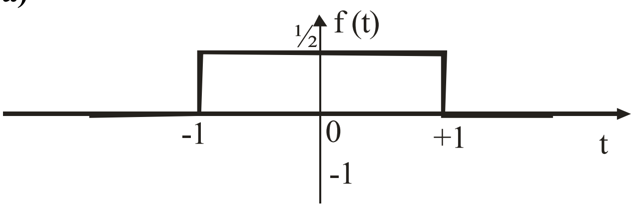
ISPS, Termín 3, 2010/11, 70b	Jméno	ID

1. Je dán signál se spojitým časem $f\left(t\right)=\left[\sigma\left(t+1\right)-\sigma\left(t-1\right)\right]/2$. (**15 b**)

a) Načrtněte průběh signálu (**3b**). Popište osy (**1b**)
b) Určete, zda je signál periodický (**1b**) .
c) Vypočtěte jeho frekvenční spektrum (**5b**).
d) Načrtněte amplitudové (**2b**) a fázové **(2b)** spektrum. Popište osy (**1b**)

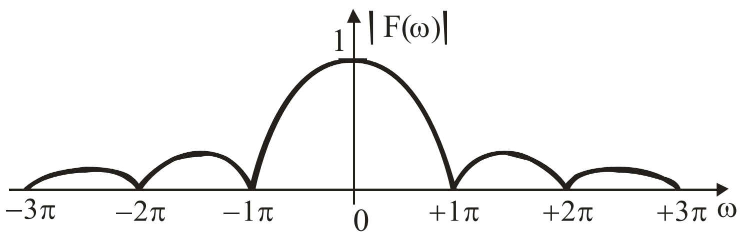
Řešení:
a)

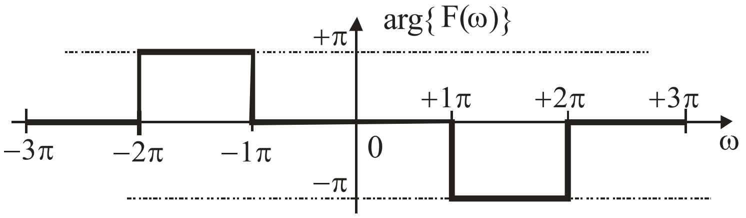


b) Signál není periodický.
c) Spektrum určíme jako jeho Fourierovu transformaci. Platí

$$F\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{+1}\frac{1}{2}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-1}^{+1}=\frac{1}{2}\frac{e^{-j\omega}-e^{+j\omega}}{-j\omega}=\frac{e^{+j\omega}-e^{-j\omega}}{2j\omega}=\frac{\sin\omega}{\omega}$$

d) Pro amplitudové a fázové spektrum platí:





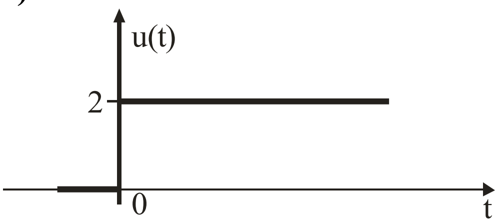
2. Na vstupu spojitého systému působí signál $u(t) = 2\sigma(t)$ a na výstupu systému je signál

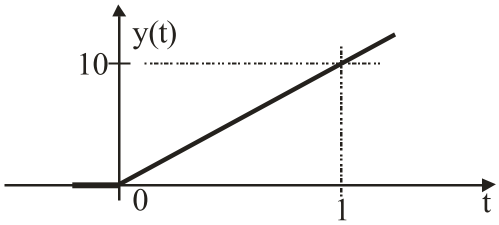
$$y(t) = \begin{cases} 10t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \textbf{(20b)}$$

a) Načrtněte vstupní a výstupní signál (**3b**). Popište osy (**1b**).
b) Určete operátorový přenos systému (**2b**).
c) Načrtněte rozložení pólů a nul (**3b**). Popište osy. (**1b**) a rozhodněte o stabilitě (**1b**)
d) Vypočtěte (**3b**) a načrtněte (**3b**) impulsovou charakteristiku. Popište osy (**1b**).
e) Určete diferenciální rovnici systému (**2b**). Označte výstup systému $y(t)$ a vstup systému $u(t)$.

Řešení

a)

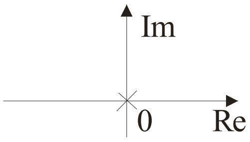




b) Pro operátorový přenos platí

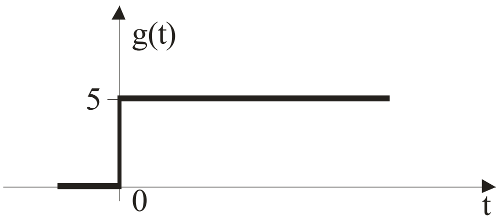
$$F(p) = \frac{\mathscr{L}\{y(t)\}}{\mathscr{L}\{u(t)\}} = \frac{\mathscr{L}\{10t\}}{\mathscr{L}\{2\sigma(t)\}} = \frac{10/p^2}{2/p} = \frac{5}{p}$$

c) Systém má jeden pól $p_1 = 0$ a žádnou nulu. Pól leží na imaginární ose- systém je na mezi stability.



d) Pro impulsovou charakteristiku platí

$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathscr{L}^{-1}\{5/p\} = 5\sigma(t)$$



e)

$$F(p) = \frac{5}{p} = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad \Rightarrow \quad pY(p) = 5U(p) \quad \Rightarrow \quad y'(t) = 5u(t)$$

3. Periodický diskrétní signál s periodou $N=4$ má následující hodnoty spektra: (**15b**)
$c_0 = 1/2;\quad c_1 = (1-j)/4;\quad c_2 = 0;\quad c_3 = (1+j)/4$

a) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum (**4b**). Ocejchujte osy (**1b**).
b) Vypočtěte hodnoty signálu $f(k)$ pro $k = 0,1,2,3$ (**5b**)
c) Načrtněte signál $f(k)$ pro $k = 0,1,2,3$ (**4b**). Ocejchujte osy (**1b**).

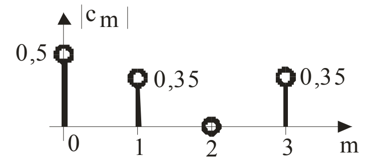
Řešení
a) Pro absolutní hodnoty a argumenty platí:

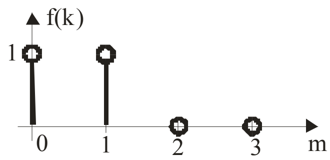
$|c_0| = 1/2 \qquad \arg\{c_0\} = 0$

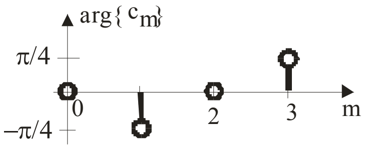
$|c_1| = \sqrt{2}/4 \qquad \arg\{c_1\} = -\pi/4$

$|c_2| = 0 \qquad \arg\{c_2\} = 0$

$|c_3| = \sqrt{2}/4 \qquad \arg\{c_3\} = +\pi/4$







b) Platí:

$$f(k) = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{jm\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{m=0}^{3} c_m e^{jm\frac{2\pi}{4}k} = \sum_{m=0}^{3} c_m e^{jm\frac{\pi}{2}k} = c_0 e^{j0\frac{\pi}{2}k} + c_1 e^{j1\frac{\pi}{2}k} + c_2 e^{j2\frac{\pi}{2}k} + c_3 e^{j3\frac{\pi}{2}k} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1-j}{4} e^{j\frac{\pi}{2}k} + 0e^{j2\frac{\pi}{2}k} + \frac{1+j}{4} e^{j3\frac{\pi}{2}k} = \frac{1}{2} + \frac{1-j}{4}\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^k + \frac{1+j}{4}\left(e^{j\frac{3\pi}{2}}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(1-j)\,j^k + \frac{1}{4}(1+j)(-j)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[(1-j)\,j^k + (1+j)(-j)^k\right]$$

Pro jednotlivé hodnoty signálu bude platit:

$$f(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[(1-j)\,j^0 + (1+j)(-j)^0\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[(1-j) + (1+j)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}[2] = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[(1-j)\,j^1 + (1+j)(-j)^1\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[(j+1) - (j-1)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}[2] = 1$$

$$f(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[(1-j)\,j^2 + (1+j)(-j)^2\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[-(1-j) - (1+j)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}[-1+j-1-j] = 0$$

$$f(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[(1-j)\,j^3 + (1+j)(-j)^3\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[(1-j)(-j) + (1+j)(j)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}[-j-1+j-1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}[-2] = 0$$

4. Lineární diskrétní systém se vstupem $u(k)$ a výstupem $y(k)$ je popsán diferenční rovnicí

$y(k)+0,5y(k-1)=2u(k)$. **(20b)**

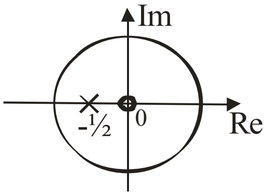
a. Určete Z přenos systému. (**2b**)
b. Načrtněte rozložení pólů a nul (**2b**). Popište osy (**1b**). Určete stabilitu systému. (**1b**)
c. Určete impulsovou charakteristiku (**3b**) a načrtněte ji pro $k=0,1,2,3$. (**4b**)
d. Určete přechodovou charakteristiku (**3b**) a načrtněte ji pro $k=0,1,2,3$. (**4b)**

Řešení

a. $Y(z)+0,5z^{-1}Y(z)=2U(z)$

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{0,5}{1+0,5z^{-1}}=\frac{2z}{z+0,5}$$

b. Systém má jednu nulu a jeden pól $z_1=-0,5$. Pól leží uvnitř jednotkové kružnice a proto je systém stabilní.



c. Způsob 1- výpočet z operátorového přenosu

$$G(z)=F(z)=\frac{2}{1+0,5z^{-1}}=\frac{2}{1-(-0,5)z^{-1}}=2\sum_{k=0}^{\infty}(-0,5)^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}2(-0,5)^k z^{-k}$$

a pro impulsovou charakteristiku tedy platí

$$g(k)=\begin{cases}2(-1/2)^k & k\ge 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

$k=0 \quad g(0)=2(-1/2)^0=2$

$k=1 \quad g(1)=2(-1/2)^1=-1$

$k=2 \quad g(2)=2(-1/2)^2=2/4=1/2=0,5$

$k=3 \quad g(3)=2(-1/2)^3=-2/8=-1/4=-0,25$

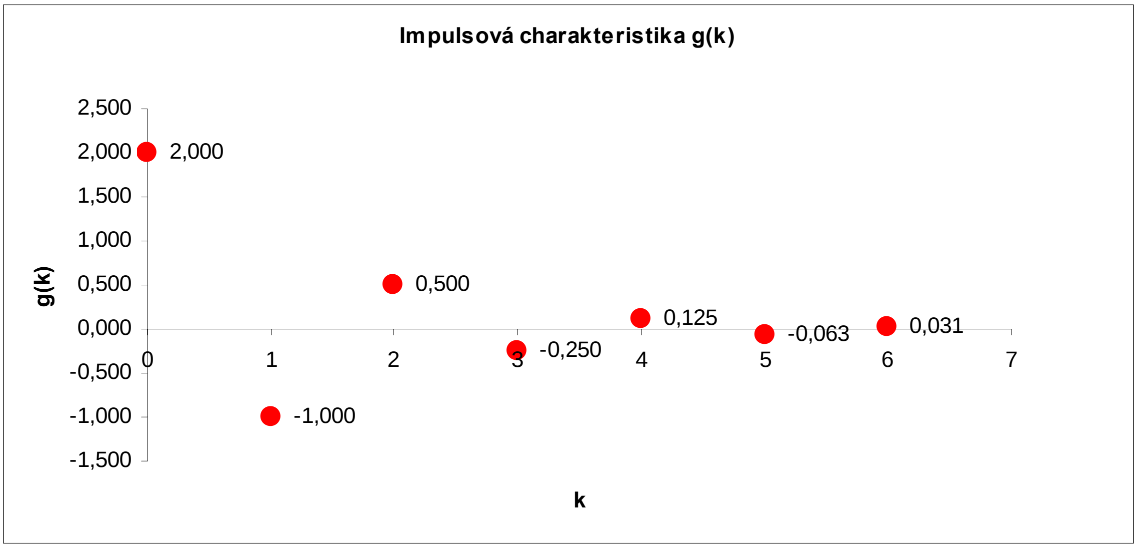
Způsob 2- dělení polynomů

z^1	z^0	z^1	z^0	z^0	z^(-1)	z(-2)	z^(-3)
2	0	1	0,5	2,000	-1,000	0,500	-0,250

2	1		
0	-1		
	-1	-0,5	
	0	0,5	
		0,5	0,25

Způsob 3- postupným řešením diferenční rovnice

$$y(k) = -0{,}5y(k-1) + 2u(k) \quad u(k) = \delta(k)$$
$$k=0 \quad y(0) = -0{,}5y(-1) + 2u(0) = 0 + 2*1 = 2$$
$$k=1 \quad y(1) = -0{,}5y(0) + 2u(1) = -0{,}5*2 + 0 = -1$$
$$k=2 \quad y(2) = -0{,}5y(1) + 2u(2) = -0{,}5*(-1) + 0 = 0{,}5$$
$$k=3 \quad y(3) = -0{,}5y(2) + 2u(3) = -0{,}5*(+0{,}5) + 0 = -0{,}25$$



d. Způsob 1- analytický výpočet z impulsové charakteristiky

$$h(k) = \sum_{i=0}^{k} g(i) = \sum_{i=0}^{k} 2(-1/2)^i = 2\sum_{i=0}^{k} (-1/2)^i = 2\frac{1-(-1/2)^{k+1}}{1-(-1/2)} = 4\frac{1-(-1/2)^{k+1}}{3} = \frac{4}{3}\left[1-(-1/2)^{k+1}\right]$$

$$k=0 \quad h(0) = \frac{4}{3}\left[1-(-1/2)^1\right] = \frac{4}{3}*\frac{3}{2} = 2$$

$$k=1 \quad h(1) = \frac{4}{3}\left[1-(-1/2)^2\right] = \frac{4}{3}\left[1-\frac{1}{4}\right] = \frac{4}{3}*\frac{3}{4} = 1$$

$$k=2 \quad h(2) = \frac{4}{3}\left[1-(-1/2)^3\right] = \frac{4}{3}\left[1+\frac{1}{8}\right] = \frac{4}{3}*\frac{9}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$k=3 \quad h(3) = \frac{4}{3}\left[1-(-1/2)^4\right] = \frac{4}{3}\left[1-\frac{1}{16}\right] = \frac{4}{3}*\frac{15}{16} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Způsob 2- postupnou sumací impulsové charakteristiky

$$h(k) = \sum_{i=0}^{k} g(i) = \sum_{i=0}^{k-1} g(i) + g(k)$$
$$k=0 \quad h(0) = g(0) = 2$$
$$k=1 \quad h(1) = h(0) + g(1) = 2 - 1 = 1$$
$$k=2 \quad h(2) = h(1) + g(2) = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$$
$$k=3 \quad h(3) = h(2) + g(3) = 1{,}5 = 1{,}5 - 0{,}25 = 1{,}25$$

Způsob 3- postupným řešením diferenční rovnice

$$y(k) = -0,5y(k-1) + 2u(k) \quad u(k) = \sigma(k)$$

$$k = 0 \quad y(0) = -0,5y(-1) + 2u(0) = 0 + 2*1 = 2$$

$$k = 1 \quad y(1) = -0,5y(0) + 2u(1) = -0,5*(2) + 2*1 = 1$$

$$k = 2 \quad y(2) = -0,5y(1) + 2u(2) = -0,5*(+1) + 2*1 = 1,5$$

$$k = 3 \quad y(3) = -0,5y(2) + 2u(3) = -0,5*(+1,5) + 2*1 = 1,25$$