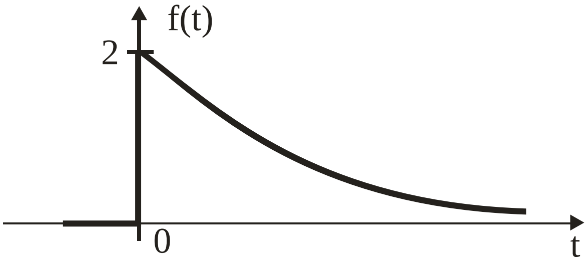
ISPS, Termín 2, 2010/11, 70b	Jméno	ID

1. Je dán signál se spojitým časem $f(t) = 2\sigma(t)e^{-2t}$. (**15 b**)

a) Načrtněte průběh signálu (**3b**). Popište osy (**1b**)
b) Určete, zda je signál periodický (**1b**) .
c) Vypočtěte jeho frekvenční spektrum (**5b**).
d) Načrtněte amplitudové (**2b**) a fázové **(2b)** spektrum. Popište osy (**1b**)

Řešení:
a)



b) Signál není periodický.
c) Spektrum určíme jako jeho Fourierovu transformaci. Platí

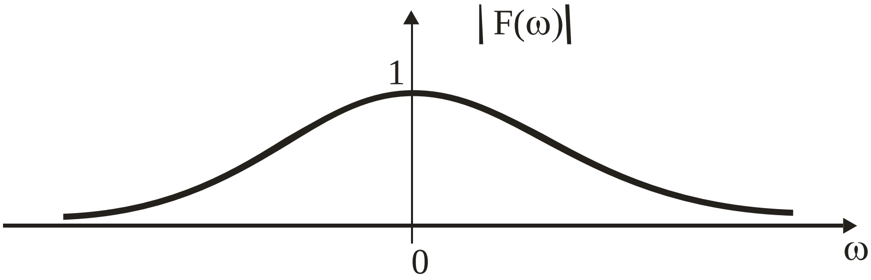
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-2t}e^{-j\omega t}dt = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-(2+j\omega)t}dt = 2\left[\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)}\right]_0^{\infty} = 2\frac{1}{-(2+j\omega)}(0-1) =$$

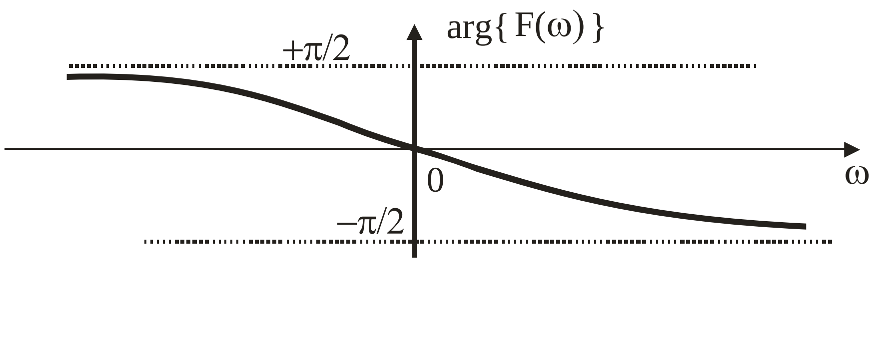
$$= 2\frac{1}{2+j\omega} = 2\frac{2-j\omega}{4+\omega^2}$$

d) Pro amplitudové a fázové spektrum platí:

$$|F(\omega)| = \left|\frac{2}{2+j\omega}\right| = \frac{2}{\sqrt{4+\omega^2}} \qquad |F(0)| = 1 \quad |F(\infty)| = 0 \quad \frac{d|F(\omega)|}{d\omega} = \frac{-\left(4+\omega^2\right)^{-1/2}2\omega}{\left(4+\omega^2\right)} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \omega = 0$$

$$\Phi(\omega) = \arctan\frac{\frac{-\omega}{4+\omega^2}}{\frac{2}{4+\omega^2}} = -\arctan\frac{\omega}{2}$$





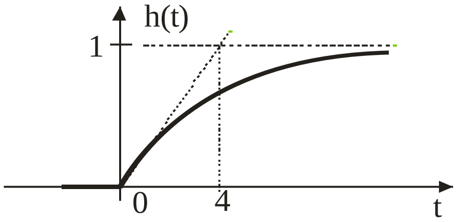
2. Přechodová charakteristika spojitého dynamického systému má tvar

$$h(t)=\begin{cases}\left(1-e^{-4t}\right) & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases} \qquad \textbf{(20b)}$$

a) Načrtněte tuto charakteristiku (**3b**). Popište osy (**1b**).
b) Vypočtěte (**3b**) a načrtněte (**3b**) impulsovou charakteristiku. Popište osy (**1b**).
c) Určete operátorový přenos systému (**2b**).
d) Načrtněte rozložení pólů a nul (**3b**). Popište osy. (**1b**) a rozhodněte o stabilitě (**1b**)
e) Určete diferenciální rovnici systému (**2b**). Označte výstup systému $y(t)$ a vstup systému $u(t)$.

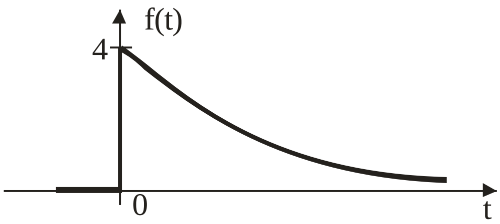
Řešení

a) $h(0)=0; h(\infty)=1; \quad \left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{t=0}=\left.4e^{-4t}\right|_{t=0}=4$



b) Pro impulsovou charakteristiku platí

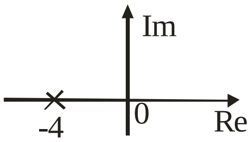
$$g(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(1-e^{-4t}\right)=\begin{cases}4e^{-4t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



c)Pro operátorový přenos platí

$$F(p)=\mathscr{L}\left\{g(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{4e^{-4t}\right\}=\frac{4}{p+4}=\frac{1}{0,25p+1}$$

d) Systém má jeden pól $p_1=-4$ a žádnou nulu. Pól leží v levé polorovině- systém je stabilní.



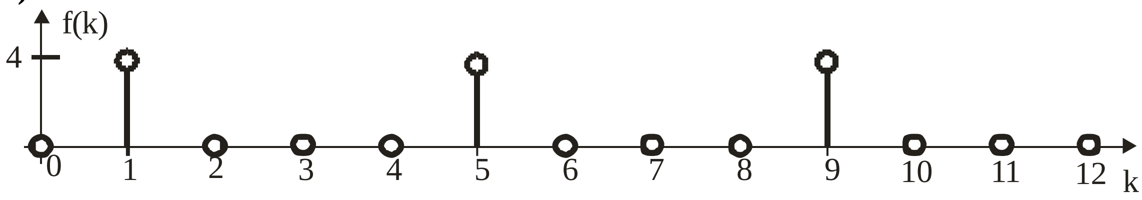
e)

$$F(p)=\frac{4}{p+4}=\frac{Y(p)}{U(p)} \quad\Rightarrow\quad Y(p)(p+4)=4U(p) \quad\Rightarrow\quad y'(t)+4y(t)=4u(t)$$

3. Pro jednu periodu diskrétního periodického signálu s periodou $N = 4$ platí:
$f(k) = 4[\sigma(k-1) - \sigma(k-2)], k = 0.1,2,3$. (**15b**)

a) Načrtněte hodnoty signálu pro $k = 0,1,2,...12$. Ocejchujte osy. (**3b**)
b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu. (**4b**)
c) Načrtněte amplitudové (**4b**) a fázové (**4b**) spektrum tohoto signálu. Ocejchujte osy.

Řešení
a)



b) Pro výpočet koeficientů diskrétní Fourierovy řady platí

$$c_m = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{-jm\frac{2\pi}{4}k} \quad m = 0,1,2,3. \text{ Jelikož } f(1) = 4, f(0) = f(2) = f(3) = 0 \text{ bude}$$

$$c_m = \frac{1}{4} f(1) e^{-jm\frac{2\pi}{4}1} = \frac{1}{4} 4 e^{-jm\frac{\pi}{2}} = e^{-jm\frac{\pi}{2}} = (-j)^m \quad m = 0,1,2,3$$

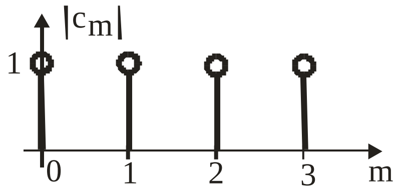
$c_0 = (-j)^0 = 1 \quad |c_0| = 1 \quad \arg c_0 = 0$

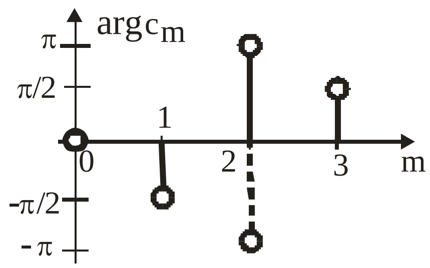
$c_1 = (-j)^1 = -j \quad |c_1| = 1 \quad \arg c_1 = -\pi/2$

$c_2 = (-j)^2 = -1 \quad |c_2| = 1 \quad \arg c_2 = \pm\pi$

$c_3 = (-j)^3 = +j \quad |c_3| = 1 \quad \arg c_3 = +\pi/2$

c)





4. Diskrétní systém je popsán operátorovým přenosem $F(z)=\dfrac{1}{z-1/2}$. (**20b**)

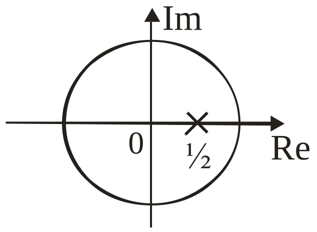
a) Určete jeho diferenční rovnici. Dále předpokládejte nulové počáteční podmínky. (**2b**)
b) Načrtněte rozložení pólů a nul (**1b**). Popište osy (**1b**)
c) Rozhodněte o jeho stabilitě. (**1b**)
d) Vypočtěte (**4b**) a načrtněte (**3b**) jeho impulsovou charakteristiku pro $k=0,1,2,3,4$.
e) Vypočtěte (**5b**) a načrtněte (**3b**) jeho přechodovou charakteristiku pro $k=0,1,2,3,4$.

Řešení
a) Platí

$$F(z)=\frac{1}{z-1/2}\frac{z^{-1}}{z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{1-1/2z^{-1}}=\frac{Y(z)}{U(z)} \quad\Rightarrow\quad Y(z)\left[1-1/2z^{-1}\right]=z^{-1}U(z) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y(k)-1/2y(k-1)=u(k-1) \quad\Rightarrow\quad y(k)=1/2y(k-1)+u(k-1)$$

b) Systém má jeden pól $z_1=1/2$ a žádnou nulu.



c) Pól leží uvnitř jednotkové kružnice a proto je systém stabilní.
d) Způsob 1 – výpočet z operátorového přenosu. Platí

$$g(k)=\mathcal{Z}^{-1}\left[F(z)\right]=\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-1/2}\right]=\mathcal{Z}^{-1}\left[z^{-1}\frac{z}{z-1/2}\right]=\begin{cases}(1/2)^{k-1} & k\geq 1\\ 0 & k<1\end{cases}.$$

$$g(0)=0 \quad g(1)=(1/2)^{1-1}=1 \quad g(2)=(1/2)^{2-1}=1/2 \quad g(3)=(1/2)^{3-1}=1/4 \quad g(4)=(1/2)^{4-1}=1/8$$

d) Způsob 2 – dělení polynomů

čitatel		jmenovatel		podíl				
z^1	z^0	z^1	z^0	z^0	z^(-1)	z(-2)	z^(-3)	z^(-4)
0	1	1	-0,5	0,000	1,000	0,500	0,250	0,125
0	0							
0	1							
	1	-0,5						
	0	0,5						
		0,5	-0,25					
		0	0,25					
			0,25	-0,125				
			0	0,125				
				0,125	-0,063			

d) Způsob 3 – postupným řešením diferenční rovnice

$$y(k)=1/2y(k-1)+u(k-1) \quad pro \quad u(k)=\delta(k)$$

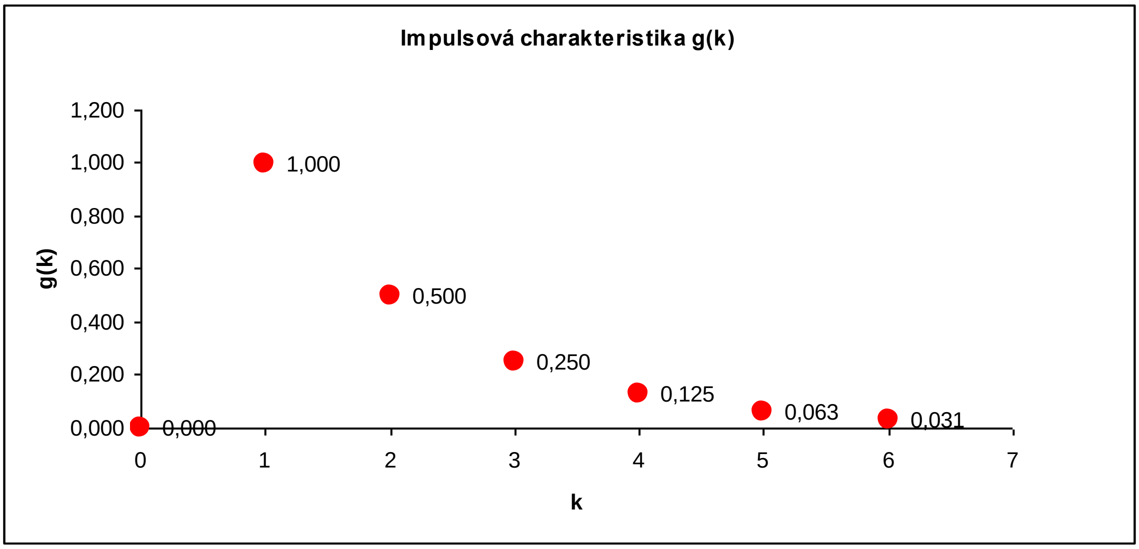
$$k=0 \quad y(0)=1/2y(0-1)+u(0-1)=0+0=0$$

$$k=1 \quad y(1)=1/2y(1-1)+u(1-1)=0+1=1$$

$$k=2 \quad y(2)=1/2y(2-1)+u(2-1)=1/2+0=1/2$$

$$k=3 \quad y(3)=1/2y(3-1)+u(3-1)=(1/2)(1/2)+0=1/4$$

$$k=4 \quad y(4)=1/2y(4-1)+u(4-1)=(1/2)(1/4)+0=1/8$$



e) Platí

$$h(k)=\sum_{i=0}^{k} g(i)=\sum_{i=0}^{k-1} g(i)+g(k)=h(k-1)+g(k)$$

$$h(0)=g(0)=0$$

$$h(1)=h(0)+g(1)=0+1=1$$

$$h(2)=h(1)+g(2)=1+1/2=3/2$$

$$h(3)=h(2)+g(3)=3/2+1/4=7/4$$

$$h(4)=h(3)+g(4)=7/4+1/8=15/8$$