B/KSAS písemka3 28.1.2011	Jméno	ID

1. Je dán spojitý signál $f(t)=\left[\sigma(t+1)-\sigma(t-1)\right]\left(\cos^2 2\pi t+\sin^2 2\pi t\right),\quad t\in(-\infty,+\infty)$.

a) Načrtněte průběh signálu. (**5b**)

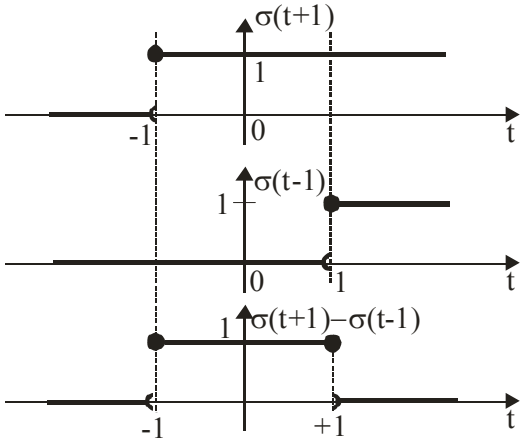
b) Určete zda je signál $f(t)$ periodický. Pokud je periodický, určete jeho periodu. (**2b**)

c) Určete jeho komplexní spektrum. (**3b**)

d) Načrtněte komplexní spektrum (**5b**). Ocejchujte osy. **Celkem 15b**

Řešení:

a) Vzhledem k tomu, že $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ platí $f(t)=\sigma(t+1)-\sigma(t-1)$, a proto

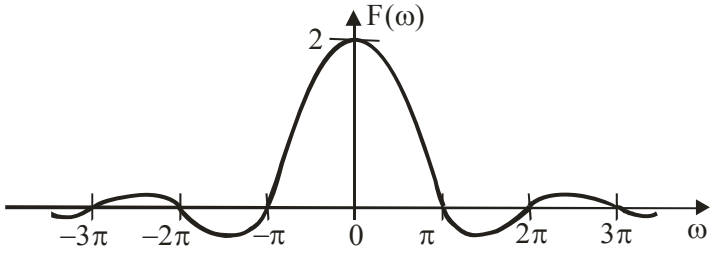


b) Signál není periodický.

c) Pro jeho spektrum platí:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{+1} e^{-j\omega t}dt=\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-1}^{+1}=\frac{e^{-j\omega}-e^{+j\omega}}{-j\omega}=2\frac{\sin\omega}{\omega}$$

d)



2. Diferenciální rovnice spojitého systému je $y' + 0{,}1y = u$.

a) Určete operátorový přenos systému. (**3b**)
b) Určete frekvenční přenos systému. (**3b**)
c) Načrtněte asymptotickou amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Ocejchujte osy. (**6b**)
d) Vypočtěte (**4b**) a načrtněte (**4b**) přechodovou charakteristiku systému. **Celkem 20b**

Řešení:

a) $y'(t) + 0{,}1y(t) = u(t) \quad / \mathscr{L} \quad \Rightarrow pY(p) + 0{,}1Y(p) = U(p)$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+0{,}1)} = \frac{10}{(10p+1)}$$

b) $$F(j\omega) = \frac{10}{(10j\omega+1)} = \frac{10}{\sqrt{100\omega^2+1}} e^{-j\arctan 10\omega}$$

c) Pro absolutní hodnotu platí:

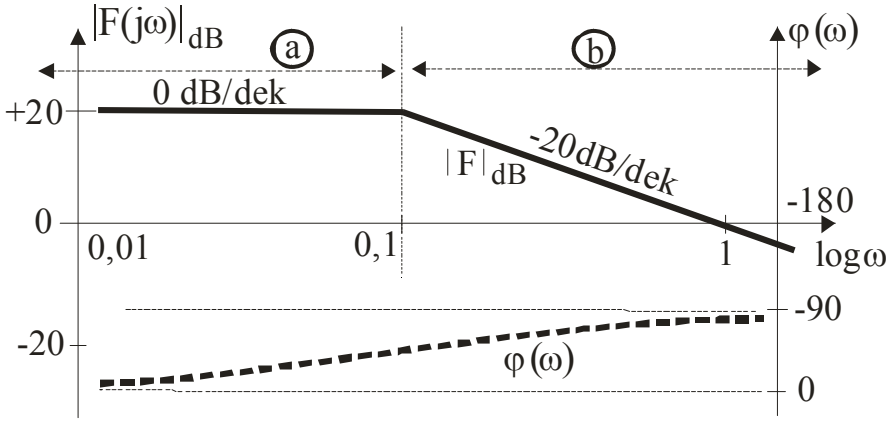
$$|F(j\omega)|_{dB} = 20\log|F(j\omega)| = 20\log 10 - 20\log\sqrt{100\omega^2+1} = 20 - 20\log\sqrt{100\omega^2+1}$$

Na charakteristice je jeden zlomový bod $\omega = 1/10 = 0{,}1$ a v jednotlivých oblastech platí:

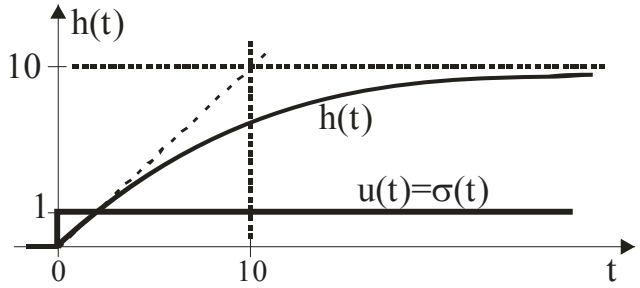
Oblast a: $\omega \ll 0{,}1 \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} \approx +20\ dB$

Oblast b: $\omega \gg 0{,}1 \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} \approx 20 - 20\log 10\omega = 20 - 20\log 10 - 20\log\omega = -20\log\omega$.

Pro fázi platí $\varphi(\omega) = -\arctan 10\omega$.



d) $$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}F(p)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p(p+0{,}1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{10}{p} - \frac{10}{p+0{,}1}\right\} = 10\left(1 - e^{-t/10}\right) \quad pro\ t > 0$$



3. Je dán diskrétní periodický signál s periodou $N = 4$ pro jehož hodnoty platí $f(0) = 2,\ f(2) = 1$ a $f(1) = f(3) = 0$.

a) Vypočtěte hodnoty diskrétní Fourierovy řady. (**6b**)
b) Načrtněte amplitudové spektrum. Ocejchujte osy.(**5b**)
c) Načrtněte fázové spektrum. Ocejchujte osy.(**4b**) **Celkem 15b**

Řešení:

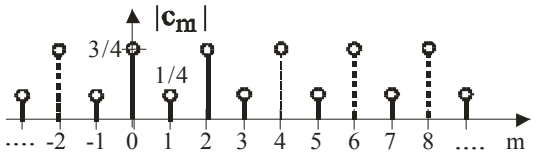
a) $c_0 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j0\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}(2\times1+0\times1+1\times1+0\times1) = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$

$$c_1 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j1\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(2\times1+0\times e^{-j\frac{\pi}{2}1}+1\times e^{-j\frac{\pi}{2}2}+0\times e^{-j\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

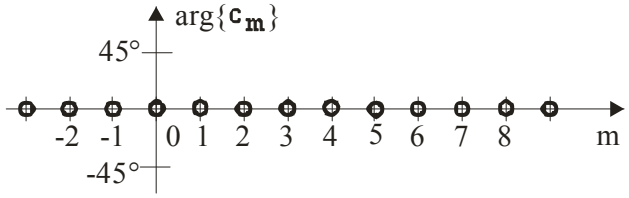
$$c_2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j2\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(2\times1+0\times e^{-j2\frac{\pi}{2}1}+1\times e^{-j2\frac{\pi}{2}2}+0.e^{-j2\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j3\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(2\times1+0\times e^{-j3\frac{\pi}{2}1}+1\times e^{-j3\frac{\pi}{2}2}+0\times e^{-j3\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

b) $|c_0| = 3/4 \quad |c_1| = 1/4 \quad |c_2| = 3/4 \quad |c_3| = 1/4$



c) $\arg\{c_0\} = 0 \quad \arg\{c_1\} = 0 \quad \arg\{c_2\} = 0 \quad \arg\{c_3\} = 0$



4. Je dán spojitý systém s impulsní charakteristikou $g(t) = A\sigma(t)$, $A > 0$ .. (**20b**)

a) Vypočtěte operátorový přenos systému. Jedná se o systém statický nebo astatický? (**3b**)

b) Vypočtěte přechodovou charakteristiku systému (**3b**)

c) Na vstupu tohoto systému je připojen tvarovač nultého řádu. Jaká musí být vzorkovací perioda T, aby pro $A = 10$ platilo pro ekvivalentní Z přenos diskretizovaného spojitého systému $F_e(z) = 1/(z-1)$? (**6b**)

d) Vypočtěte přechodovou charakteristiku diskretizovaného systému (**4b**) a načrtněte ji spolu s přechodovou charakteristikou spojitého systému ($A = 10$) do jednoho obrázku a porovnejte. (**4b**).

Řešení

a) Pro operátorový přenos platí:
$F(p) = \mathscr{L}\{g(t)\} = A\mathscr{L}\{\sigma(t)\} = A/p$ Jedná se o astatický (integrační) systém.

b) Pro přechodovou charakteristiku platí

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}F(p)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{A}{p^2}\right\} = \begin{cases} At & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

c) Pro ekvivalentní Z přenos diskretizovaného systému platí
$F_e(z) = (1 - z^{-1})\mathscr{Z}\{h(k)\}$ kde $h(k)$ je navzorkovaná přechodová charakteristika $h(t)$ tj.
$h(k) = h(t)\big|_{t=kT} = AkT \quad k = 0,1,2,\ldots.$

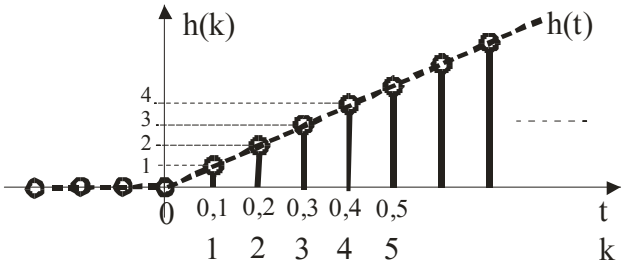
Její Z obraz bude $\mathscr{Z}\{h(k)\} = \mathscr{Z}\{AkT\} = AT.\mathscr{Z}\{k\} = AT\dfrac{z}{(z-1)^2}$

a pro ekvivalentní Z přenos diskretizovaného systému bude platit

$$F_e(z) = (1 - z^{-1})\mathscr{Z}\{h(k)\} = \frac{z-1}{z}\frac{ATz}{(z-1)^2} = \frac{AT}{z-1} \quad \Rightarrow \quad AT = 1 \quad T = \frac{1}{A} = \frac{1}{10} = 0{,}1\,\text{sec}$$

d) Pro přechodovou charakteristiku diskretizovaného systému platí

$$\mathscr{Z}\{h(k)\} = \frac{z}{z-1}F_e(z) = \frac{z}{z-1}\frac{1}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad \Rightarrow \quad h(k) = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$



Obě charakteristiky nabývají v okamžicích vzorkování stejných hodnot.