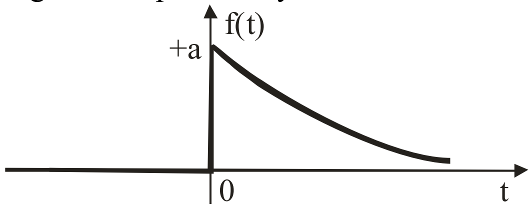
B/KSAS Písemka2 21.1.2011	Jméno	ID

1. Je dán spojitý signál $f(t) = ae^{-at}\sigma(t) \quad a > 0$. (**15b**)

- **a)** Rozhodněte, zda je signál periodický (**1b)** a načrtněte ho (**4b**)
- **b)** Vypočtěte jeho spektrum (**5b**)
- **c)** Určete amplitudové spektrum (**2b**) a načrtněte ho (**3b**)

Řešení:

a) Signál není periodický.



b) Pro spektrum signálu platí

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{+\infty} ae^{-at} e^{-j\omega t} dt = a\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = a\left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right]_0^{\infty} = \frac{a}{(a+j\omega)} = \frac{a(a-j\omega)}{a^2+\omega^2}$$

c) Pro amplitudové spektrum platí

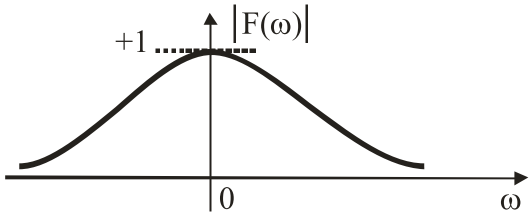
$$|F(\omega)| = \left|\frac{a(a-j\omega)}{a^2+\omega^2}\right| = \frac{a\sqrt{a^2+\omega^2}}{a^2+\omega^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

Funkce $F(\omega)$ je sudou funkcí kmitočtu a platí:

$|F(0)| = \dfrac{a}{\sqrt{a^2}} = 1 \qquad \lim\limits_{\omega\to\infty} |F(\omega)| = \lim\limits_{\omega\to\infty} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}} = 0$ a pro $\omega > 0$ je tato funkce monotónně klesající

neboť

$$\frac{d|F(\omega)|}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\right) = \frac{-a\frac{1}{2}\left(a^2+\omega^2\right)^{-1/2} 2\omega}{\left(a^2+\omega^2\right)} = -\frac{\omega a}{\left(a^2+\omega^2\right)}\left(a^2+\omega^2\right)^{-1/2} < 0 \quad \forall \omega > 0$$



2. Spojitý signál z příkladu 1 s hodnotou $a = 1$ je vstupem spojitého systému. Na výstupu tohoto systému je signál $y(t) = \begin{cases} e^{-t} - e^{-2t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$. (**20b**)

a) Načrtněte průběh výstupního signálu (**7b**)
b) Sestavte diferenciální rovnici systému (**6b**)
c) Načrtněte amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku systému v logaritmických souřadnicích (**7b**)

Řešení:

a) Platí $y(0) = 0, y(\infty) = 0$ a pro derivaci platí:

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)}{dt} = -e^{-t} + 2e^{-2t}$$

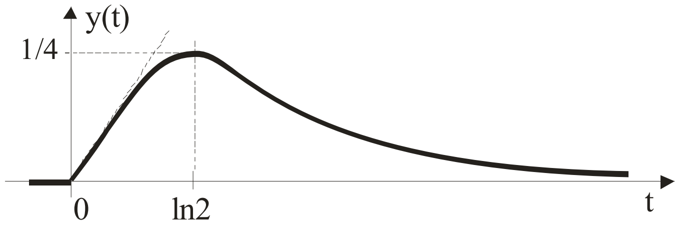
Extrémy jsou v bodech, které splňují rovnici

$$-e^{-t} + 2e^{-2t} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2e^{-2t} = e^{-t} \quad \Rightarrow \quad 2e^{-t} = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln 2 - t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \ln 2$$

Extrém je tedy jen jeden a funkce v něm nabývá hodnoty

$$\left[e^{-t} - e^{-2t}\right]_{t=\ln 2} = e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^{-1} - \left(e^{\ln 2}\right)^{-2} = (2)^{-1} - (2)^{-2} = 1/2 - 1/4 = 1/4 > 0$$

Pro směrnici tečny v bodě $t = 0$ platí: $y'(0) = \left[-e^{-t} + 2e^{-2t}\right]_{t=0} = -1 + 2 = 1$



b) Pro Laplaceův obraz vstupního a výstupního signálu platí:

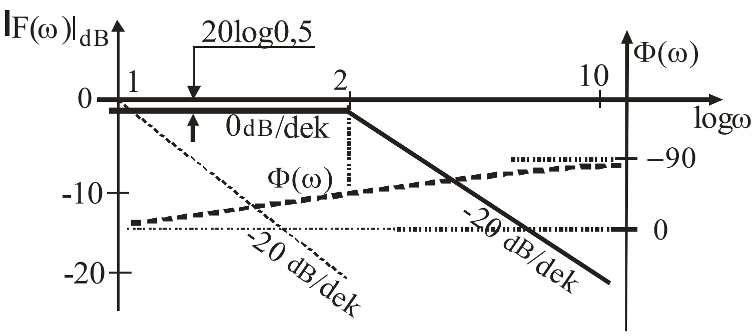
$$U(p) = \mathscr{L}\{u(t)\} = \mathscr{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{p+1} \qquad Y(p) = \mathscr{L}\{y(t)\} = \mathscr{L}\{e^{-t} - e^{-2t}\} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

Pro operátorový přenos systému platí

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}}{\frac{1}{p+1}} = 1 - \frac{p+1}{p+2} = \frac{p+2-p-1}{p+2} = \frac{1}{p+2} = \frac{0{,}5}{0{,}5p+1}.$$

Pro diferenciální rovnici systému platí: $y'(t) + 2y(t) = u(t)$

c) Frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích:



3. Je dán diskrétní signál $f(k)=\left[\sigma(k)-\sigma(k-N)\right]$ $N>0$. (**15b**)

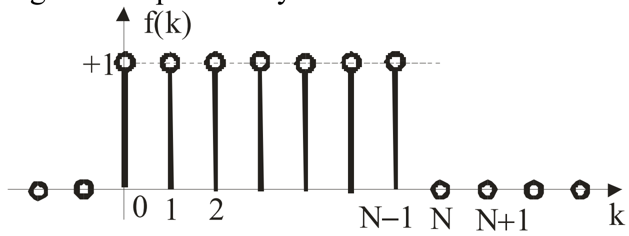
a) Rozhodněte, zda je signál periodický (**1b**) a načrtněte ho (**4b**)

b) Vypočtěte jeho spektrum (Pomůcka: $\sum_{k=0}^{N-1} q^k = \frac{1-q^N}{1-q}$) (**5b**)

c) Načrtněte amplitudové spektrum pro $m \in \langle 0, N+1 \rangle$ (**5b**)

Řešení:

a) Signál není periodický.



b) V případě $m=0$ platí pro spektrum signálu:

$$F(0)=\sum_{k=0}^{N-1} f(k)e^{-j0\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{k=0}^{N-1}1=N$$

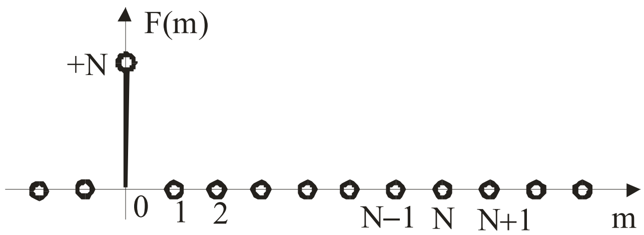
V případě $m \neq 0$ platí pro spektrum signálu

$$F(m)=\sum_{k=0}^{N-1} f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{k=0}^{N-1}1e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{-jm\frac{2\pi}{N}}\right)^k=\frac{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}=\frac{1-e^{-jm2\pi}}{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}$$

Hodnoty spektra jsou v tomto případě nulové, neboť čitatel $F(m)$ je roven $1-e^{-jm2\pi}=1-1=0$ a jmenovatel je od nuly různý. Pro spektrum tedy platí:

$$F(m)=\begin{cases} N & m=0 \\ 0 & m=1,2,\dots N-1 \end{cases}$$

c) Pro spektrum signálu platí

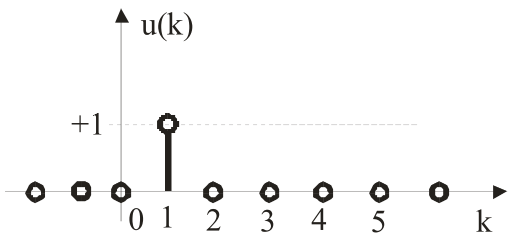


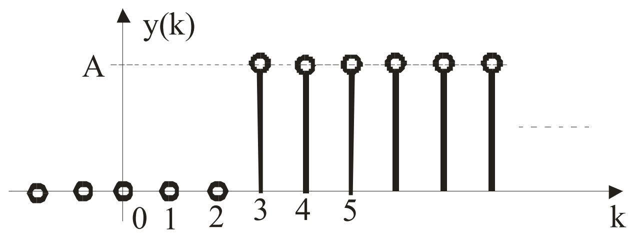
4. Diskrétní systém má na vstupu posloupnost $u(k)=\delta(k-1)$ a na výstupu posloupnost $y(k)=A\sigma(k-3)$ kde $A>1$. (**20b**)

a) Načrtněte průběh obou posloupností. (**4b**)
b) Sestavte diferenční rovnici systému (**6b**)
c) Vypočtěte (**5b**) a načrtněte (**5b**) přechodovou charakteristiku systému

Řešení:

a)





b) Pro Z obraz vstupního a výstupního signálu platí:

$$U(z)=Z\{\delta(k-1)\}=z^{-1} \quad Y(z)=Z\{A\sigma(k-3)\}=Az^{-3}\frac{z}{z-1}=A\frac{z^{-3}}{1-z^{-1}}$$

Pro operátorový přenos a diferenční rovnici platí

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{A\frac{z^{-3}}{1-z^{-1}}}{z^{-1}}=\frac{Az^{-2}}{1-z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad y(k)-y(k-1)=Au(k-2)$$

c) Pro přechodovou charakteristiku platí

$$Z\{h(k)\}=F(z)\frac{z}{z-1}=\frac{Az^{-2}}{1-z^{-1}}\frac{z}{z-1}=\frac{Az^{-1}}{z-1}\frac{z}{z-1}=\frac{Az^{-1}}{z-1}\frac{z}{z-1}=Az^{-1}\frac{z}{(z-1)^2}$$

Protože $Z\{k\}=\dfrac{z}{(z-1)^2} \quad \Rightarrow \quad h(k)=\begin{cases} A(k-1) & k=1,2,3,\dots \\ 0 & k<1 \end{cases}$