B/KSAS-sk.B termín1, 13.1.2011	Jméno	ID

1. Je dán spojitý signál $f(t) = 1 + 4\sin^2\frac{t}{2} - 4\cos^2\frac{t}{2}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$ (**15b**)

a) Rozhodněte, zda je signál periodický. V případě že ano, určete jeho základní periodu a základní kmitočet. (**3b**)
b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu. (**4b**)
c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum signálu. Popište a ocejchujte osy (**5b**)
d) V případě, že tento signál je periodický určete jeho výkon, v případě že není periodický určete jeho energii. (**3b**)

Pomůcka: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Řešení:

a) Platí $f(t) = 1 + 4\sin^2\frac{t}{2} - 4\cos^2\frac{t}{2} = 1 - 4\cos t$. Signál je periodický se základní periodou $P = 2\pi$ a základním kmitočtem $\omega_0 = 2\pi / P = 2\pi / 2\pi = 1$.

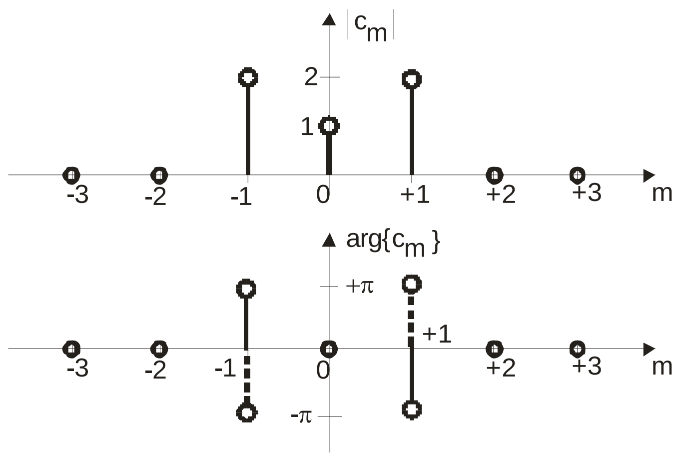
b) Platí $f(t) = 1 - 4\cos t = 1 - 4\frac{(e^{jt} + e^{-jt})}{2} = 1 - 2e^{jt} - 2e^{-jt} = 1 - 2e^{-jt} - 2e^{+jt}$ takže ve spektru tohoto signálu jsou jen koeficienty $c_0 = 1, c_{-1} = -2, c_{+1} = -2$ a ostatní koeficienty jsou nulové.

c) Pro amplitudové a fázové spektrum platí

$|c_0| = |1| = 1 \qquad \arg\{c_0\} = \arg\{1\} = 0$

$|c_{-1}| = |-2| = 2 \qquad \arg\{c_{-1}\} = \arg\{-2\} = \pm\pi$

$|c_{+1}| = |-2| = 2 \qquad \arg\{c_{+1}\} = \arg\{-2\} = \pm\pi$



d) Signál je periodický a pro jeho výkon platí na základě Parcevalovy rovnosti

$$P_W = \frac{1}{P}\int_0^P |f(t)|^2\, dt = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |c_m|^2 = c_0^2 + c_{-1}^2 + c_{+1}^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$$

2. Spojitý systém má impulsní charakteristiku $g(t) = \begin{cases} 10\left(1 - e^{-t/4}\right) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ (**20b**)

a) Načrtněte tuto charakteristiku (**3b**). Popište a ocejchujte osy . Na časové ose vyznačte hodnotu časové konstanty systému (**2b**).

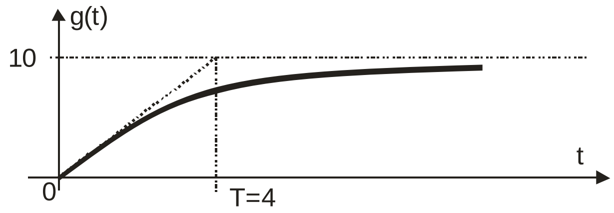
b) Vypočtěte přechodovou charakteristiku $h(t)$ (**6b**).

c) Vypočtěte operátorový přenos systému (**5b**)

d) Na vstupu systému působí signál $u(t) = 4\delta(t)$. Určete ustálenou hodnotu výstupu systému. (**4b**)

Řešení:

a) Platí $g(0) = 0,\ g(\infty) = 10$, $g'(t) = \frac{10}{4} e^{-t/4} \quad \Rightarrow \quad g'(0) = \frac{10}{4}$



b) Platí $h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = 10\int_0^t 1 d\tau - 10\int_0^t e^{-\tau/4} d\tau = 10[\tau]_0^t - 10\left[-4e^{-\tau/4}\right]_0^t = 10\left[t + 4\left(e^{-t/4} - 1\right)\right]$

c) Platí

$$F(p) = \mathscr{L}\{g(t)\} = \mathscr{L}\left\{10\left(1 - e^{-t/4}\right)\right\} = \frac{10}{p} - \frac{10}{p + 1/4} = \frac{10}{p} - \frac{40}{4p+1} = \frac{40p + 10 - 40p}{p(4p+1)} = \frac{10}{p(4p+1)}$$

d) Na vstupu působí Diracův impuls o ploše 4. Odezva systému na takový signál je rovna $4g(t)$ a proto pro ustálenou hodnotu platí

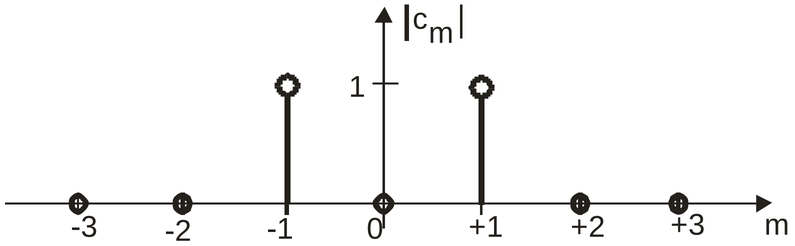
$$\lim_{t\to\infty} 4g(t) = 4\lim_{t\to\infty} g(t) = 40$$

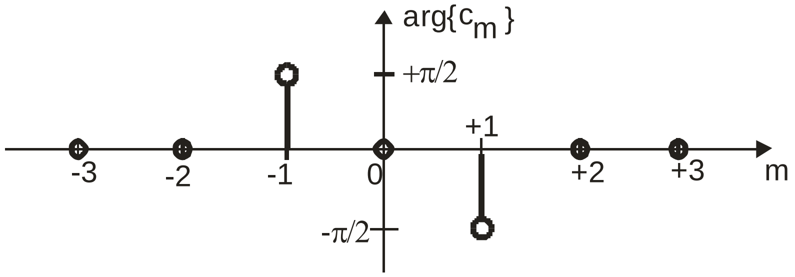
3. Hodnoty koeficientů spektra diskrétního periodického signálu s periodou $N = 8$ jsou $c_{-1} = +j, c_{+1} = -j$ a ostatní koeficienty jsou nulové. **(15b)**

a) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum. Popište a ocejchujte osy (**5b**)
b) Vypočtěte tento diskrétní signál (**5b**)
c) Načrtněte jednu periodu signálu. Popište a ocejchujte osy. (**5b**)

Řešení:

a) Platí $|c_{-1}| = |+j| = 1, \arg\{c_{-1}\} = +\pi/2, \quad |c_{+1}| = |-j| = 1, \arg\{c_{+1}\} = -\pi/2$



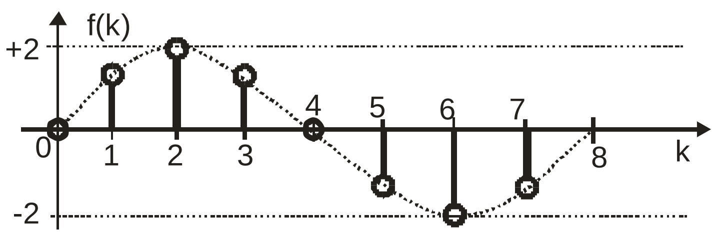


b) Vzhledem k tomu, že i spektrum je periodické s periodou N lze v inverzní DFŘ sčítat od libovolného indexu počínaje tj.

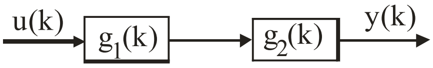
$$f(k) = \sum_{m=0}^{8-1} c_m e^{jm\frac{2\pi}{8}k} = \sum_{m=-1}^{8-2} c_m e^{jm\frac{2\pi}{8}k} = c_{-1}e^{j(-1)\frac{2\pi}{8}k} + c_0 e^{j(0)\frac{2\pi}{8}k} + c_{+1}e^{j(+1)\frac{2\pi}{8}k} + ..+ c_{+5}e^{j(+5)\frac{2\pi}{8}k} + c_{+6}e^{j(+6)\frac{2\pi}{8}k}$$

c) Je zřejmé, že z celé této řady jsou nenulové jen koeficienty $c_{-1} = +j, c_{+1} = -j$ a ostatní koeficienty jsou nulové. Proto

$$f(k) = c_{-1}e^{j(-1)\frac{2\pi}{N}k} + c_{+1}e^{j(+1)\frac{2\pi}{N}k} = je^{-j\frac{2\pi}{N}k} - je^{+j\frac{2\pi}{N}k} = 2\frac{e^{+j\frac{2\pi}{N}k} - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}{2j} = 2\sin\frac{2\pi}{N}k$$



4. Je dán diskrétní systém podle obrázku a pro impulsní charakteristiky platí



$$g_1(k)=\begin{cases}(-0,4)^k & k\ge 0\\ 0 & k<0\end{cases}\qquad g_2(k)=\begin{cases}(-0,8)^k & k\ge 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$ (**20b**)

a) Vypočtěte operátorový přenos celého systému (**5b**)
b) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. (**4b**)
c) Vypočtěte impulsní charakteristiku celého systému (**4b**)
d) Určete diferenční rovnici celého systému (**4b**)
e) Rozhodněte o stabilitě celého systému, zdůvodněte. (**3b**)

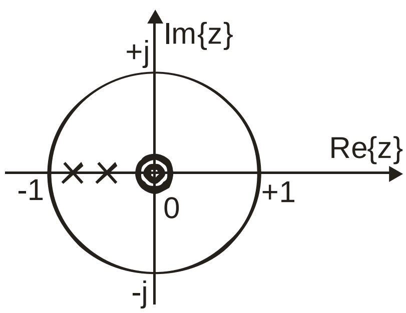
Řešení:

a) Platí

$$F_1(z)=\mathcal{Z}\{g_1(k)\}=\frac{z}{z+0,4},\quad F_2(z)=\mathcal{Z}\{g_2(k)\}=\frac{z}{z+0,8},$$

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=F_1(z)F_2(z)=\frac{z}{z+0,4}\frac{z}{z+0,8}=\frac{z^2}{(z+0,4)(z+0,8)}$$

b) Systém má dva póly $z_1=-0,4;\ z_2=-0,8$ a jednu dvojnásobnou nulu $n_1=n_2=0$.



c) Pro impulsní charakteristiku platí

$$F(z)=\frac{z^2}{(z+0,4)(z+0,8)}=\frac{Az}{z+0,4}+\frac{Bz}{z+0,8}=\frac{Az^2+0,8Az+Bz^2+0,4Bz}{(z+0,4)(z+0,8)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{matrix}A+B=1\\0,8A+0,4B=0\end{matrix}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}A=1-B\\0,8(1-B)+0,4B=0\end{matrix}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}A=1-B\\0,8-0,4B=0\end{matrix}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}A=-1\\B=2\end{matrix}$$

$$F(z)=\frac{2z}{z+0,8}-\frac{z}{z+0,4}=\frac{2}{1+0,8z^{-1}}-\frac{1}{1+0,4z^{-1}}\Rightarrow g(k)=\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}=\begin{cases}2(-0,8)^k-(-0,4)^k & k\ge 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

d) pro diferenční rovnici platí

$$F(z)=\frac{z^2}{(z+0,4)(z+0,8)}=\frac{z^2}{z^2+1,2z+0,32}=\frac{1}{1+1,2z^{-1}+0,32z^{-2}}=\frac{Y(z)}{U(z)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ Y(z)\left(1+1,2z^{-1}+0,32z^{-2}\right)=U(z)\ \Rightarrow\ y(k)+1,2y(k-1)+0,32y(k-2)=u(k)$$

e) Oba póly systému leží uvnitř jednotkového kruhu, a proto je systém stabilní.