| B/KSAS-sk.A termín1, 13.1.2011 | Jméno | ID |
|---|---|---|

**1.** Je dán spojitý signál $f\left(t\right)=1-8\cos\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{t}{2},\quad t\in\left(-\infty,+\infty\right)$. **(15b)**

a) Rozhodněte, zda je signál periodický. V případě že ano, určete jeho základní periodu a základní kmitočet. (**3b**)

b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu. (**4b**)

c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum signálu. Popište a ocejchujte osy. (**5b**)

d) V případě, že tento signál je periodický určete jeho výkon, v případě že není periodický určete jeho energii. (**3b**)

Pomůcka: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

**Řešení:**

**a)** Platí $f\left(t\right)=1-8\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}=1-4\sin t$. Signál je periodický se základní periodou $P=2\pi$ a základní kmitočtem $\omega_0 = 2\pi/P = 2\pi/2\pi = 1$.

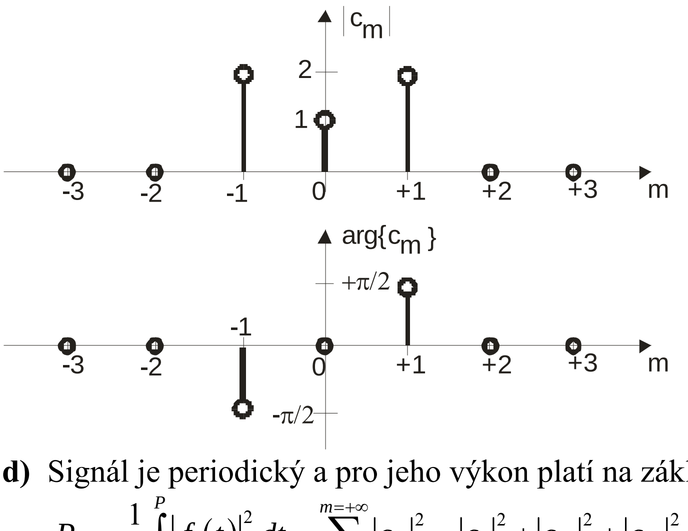
**b)** Platí $f\left(t\right)=1-4\sin t=1-4\dfrac{(e^{jt}-e^{-jt})}{2j}=1+2j(e^{jt}-e^{-jt})=1-2je^{-jt}+2je^{+jt}$ takže ve spektru tohoto signálu jsou jen koeficienty $c_0=1, c_{-1}=-2j$ a $c_{+1}=+2j$ a ostatní koeficienty jsou nulové.

**c)** Pro amplitudové a fázové spektrum platí

$|c_0|=|1|=1 \qquad \arg\{c_0\}=\arg\{1\}=0$

$|c_{-1}|=|-2j|=2 \qquad \arg\{c_{-1}\}=\arg\{-2j\}=-\pi/2$

$|c_{+1}|=|+2j|=2 \qquad \arg\{c_{+1}\}=\arg\{+2j\}=+\pi/2$




**d)** Signál je periodický a pro jeho výkon platí na základě Parcevalovy rovnosti

$$P_W=\frac{1}{P}\int_0^P\left|f\left(t\right)\right|^2dt=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}|c_m|^2=|c_0|^2+|c_{-1}|^2+|c_{+1}|^2=1^2+2^2+2^2=9$$

**2.** Spojitý systém má přechodovou charakteristiku $h(t)=\begin{cases} 2+2e^{-t/2}-4e^{-t/4} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ (**20b**)

a) Načrtněte tuto charakteristiku. Popište a ocejchujte osy. (**3b**)

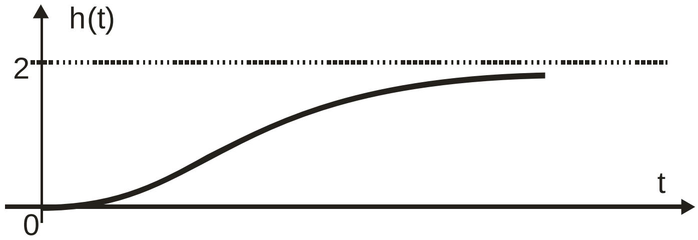
b) Vypočtěte impulsovou charakteristiku $g(t)$ (**5b**) a načrtněte ji. Popište a ocejchujte osy (**3b**)

c) Vypočtěte operátorový přenos systému (**5b**)

d) Na vstupu systému působí signál $u(t)=4\sigma(t)$. Určete ustálenou hodnotu výstupu systému. (**4b**)

**Řešení:**

**a)** Přechodová charakteristika $h(0)=0,\ h'(0)=0,\ h(\infty)=2,\ h'(\infty)=0$

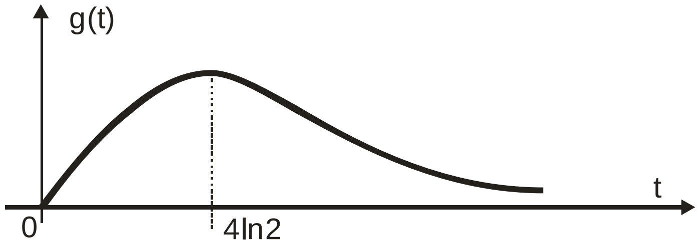



**b)** Pro impulsovou charakteristiku platí

$$g(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(2+2e^{-t/2}-4e^{-t/4}\right)=2\left(-\frac{1}{2}e^{-t/2}\right)-4\left(-\frac{1}{4}e^{-t/4}\right)=e^{-t/4}-e^{-t/2}$$

Extrém: $g'(t)=-\frac{1}{4}e^{-t/4}+\frac{1}{2}e^{-t/2}=0\Rightarrow\frac{1}{2}e^{-t/2}=\frac{1}{4}e^{-t/4}\Rightarrow 2=e^{+t/2}e^{-t/4}=e^{+t/4}\Rightarrow t=4\ln 2$

$g(0)=0,\ g'(0)=0{,}5-0{,}25=0{,}25,\ g(\infty)=0,\ g'(\infty)=0$




**c)** Platí

$$F(p)=\mathscr{L}\{g(t)\}=\mathscr{L}\left\{e^{-t/4}-e^{-t/2}\right\}=\frac{1}{p+1/4}-\frac{1}{p+1/2}=\frac{4}{4p+1}-\frac{2}{2p+1}=\frac{8p+4-8p-2}{(4p+1)(2p+1)}=$$

$$=\frac{2}{(4p+1)(2p+1)}$$

**d)** Na vstupu působí jednotkový skok o velikosti 4. Odezva systému na takový signál je rovna $4h(t)$ a proto pro ustálenou hodnotu platí $\lim\limits_{t\to\infty}4h(t)=4\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=8$

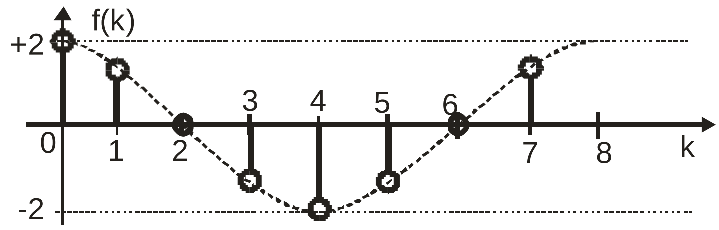
**3.** Je dán diskrétní periodický signál $f(k) = -2\sin\left(\frac{2\pi}{N}k - \frac{\pi}{2}\right)$ s periodou $N = 8$. **(15b)**

a) Načrtněte jednu periodu signálu. Popište a ocejchujte osy. (**5b**)
b) Určete spektrum tohoto signálu (**5b**)
c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum. Popište a ocejchujte osy. (**5b**)

Pomůcka: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

**Řešení:**

**a)** Platí $f(k) = -2\sin\left(\frac{2\pi}{8}k - \frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{2\pi}{8}k\cos\frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{2\pi}{8}k\sin\frac{\pi}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{8}k$

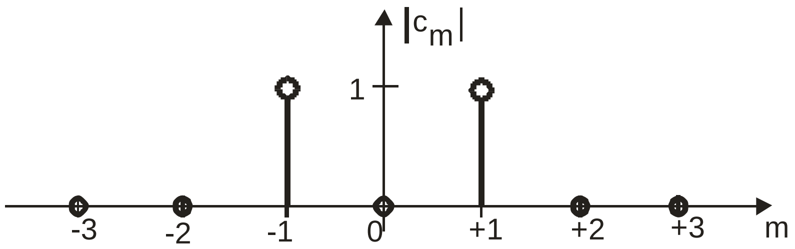


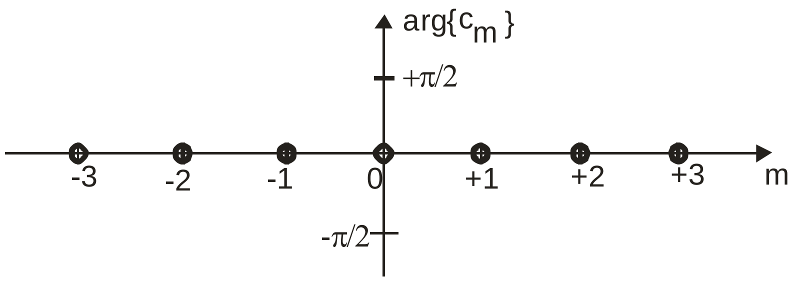

**b)** Platí $f(k) = 2\cos\frac{2\pi}{8}k = 2\frac{e^{j\frac{2\pi}{8}k} + e^{-j\frac{2\pi}{8}k}}{2} = e^{j\frac{2\pi}{8}k} + e^{-j\frac{2\pi}{8}k} = e^{-j\frac{2\pi}{8}k} + e^{+j\frac{2\pi}{8}k}$. Vzhledem k tomu, že spektrum je také periodické s periodou $N$ lze v inverzní formuli DFŘ sčítat od libovolného indexu počínaje tj.

$$f(k) = \sum_{m=0}^{8-1} c_m e^{jm\frac{2\pi}{8}k} = \sum_{m=-1}^{8-2} c_m e^{jm\frac{2\pi}{8}k} = c_{-1}e^{j(-1)\frac{2\pi}{8}k} + c_0 e^{j(0)\frac{2\pi}{8}k} + c_{+1}e^{j(+1)\frac{2\pi}{8}k} + .. + c_{+5}e^{j(+5)\frac{2\pi}{8}k} + c_{+6}e^{j(+6)\frac{2\pi}{8}k}$$

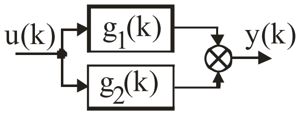
Je zřejmé, že $c_{-1} = 1, c_{+1} = 1$ a ostatní koeficienty spektra jsou nulové.

**c)** Platí: $|c_{-1}| = |1| = 1, \arg\{c_{-1}\} = 0, \quad |c_{+1}| = |1| = 1, \arg\{c_{+1}\} = 0$



**4.** Je dán diskrétní systém podle obrázku a pro impulsní charakteristiky platí




$$g_1(k) = \begin{cases} 0{,}5^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad g_2(k) = \begin{cases} 0{,}8^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$ (**20b**)

a) Vypočtěte operátorový přenos celého systému (**5b**)
b) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. (**4b**)
c) Vypočtěte impulsní charakteristiku celého systému (**4b**)
d) Určete diferenční rovnici celého systému (**4b**)
e) Rozhodněte o stabilitě celého systému, zdůvodněte. (**3b**)

**Řešení:**

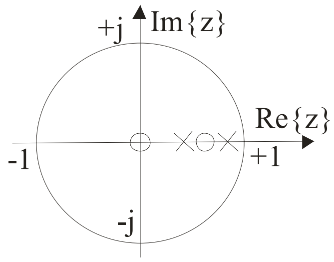
**a)** Platí

$$F_1(z) = \mathcal{Z}\{g_1(k)\} = \frac{z}{z-0{,}5}, \quad F_2(z) = \mathcal{Z}\{g_2(k)\} = \frac{z}{z-0{,}8},$$

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = F_1(z) + F_2(z) = \frac{z}{z-0{,}5} + \frac{z}{z-0{,}8} = \frac{2z^2 - 1{,}3z}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)}$$

**b)** Platí

$$F(z) = \frac{2z^2 - 1{,}3z}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)} = \frac{2z(z-0{,}65)}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)}$$. Systém má dva póly $z_1 = 0{,}5; z_2 = 0{,}8$ a dvě nuly $n_1 = 0, n_2 = 0{,}65$.




**c)** Pro impulsní charakteristiku platí

$$g(k) = g_1(k) + g_2(k) = \begin{cases} 0{,}5^k + 0{,}8^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

**d)** Platí

$$F(z) = \frac{2z^2 - 1{,}3z}{(z-0{,}5)(z-0{,}8)} = \frac{2z^2 - 1{,}3z}{z^2 - 1{,}3z + 0{,}4} = \frac{2 - 1{,}3z^{-1}}{1 - 1{,}3z^{-1} + 0{,}4z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Y(z)\left(1 - 1{,}3z^{-1} + 0{,}4z^{-2}\right) = U(z)\left(2 - 1{,}3z^{-1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y(k) - 1{,}3y(k-1) + 0{,}4y(k-2) = 2u(k) - 1{,}3u(k-1)$$

**e)** Oba póly systému leží uvnitř jednotkového kruhu, a proto je systém stabilní.