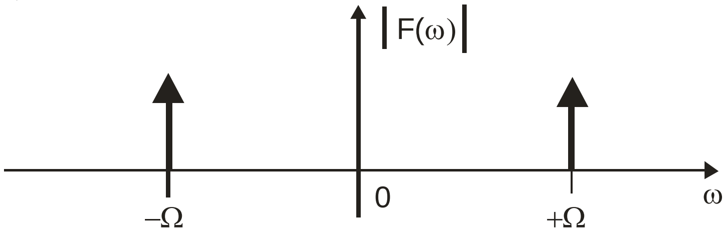
2009 B/KSAS 3.termín 29.1.2010	Jméno	ID=

1. Spektrum spojitého signálu je $F(\omega)=\pi\left[\delta(\omega+\Omega)+\delta(\omega-\Omega)\right]$ kde $\delta(\omega)$ je Diracova funkce.

a) Načrtněte toto spektrum. Popište osy. **(3b)**
b) Vypočtěte časový průběh signálu. **(10b)**
c) Načrtněte časový průběh signálu. Popište osy. **(2b)**

Řešení:

a)

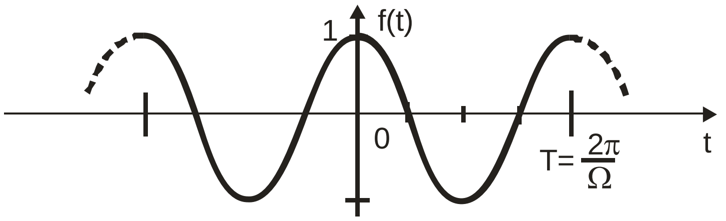


b)

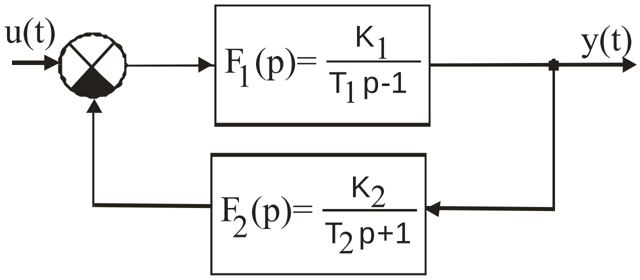
$$f(t)=\mathrm{F}^{-1}\left\{F(\omega)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi\left[\delta(\omega+\Omega)+\delta(\omega-\Omega)\right]e^{j\omega t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+\Omega)e^{j\omega t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\Omega)e^{j\omega t}dt\right\}=\frac{1}{2}\left\{e^{j\Omega t}+e^{-j\Omega t}\right\}=\cos\Omega t$$

c)



2) Je dáno zpětnovazební spojení dvou systémů tak, jak ukazuje obrázek. Konstanty K_1, T_1, K_2, T_2 jsou kladná nenulová čísla. (**20b**)



a) Rozhodněte o stabilitě každého dílčího systému zvlášť (**6b**).
b) Vypočtěte celkový přenos systému (**6b**).
c) Jaká musí být velikost konstanty T_2 tak, aby celý systém byl na mezi stability ($\xi = 0$) (**4b**).
d) Předpokládejte, že $K_1 = 1, T_1 = 10T_2$. Jaká musí být velikost konstanty K_2 tak, aby celý systém byl na mezi periodicity ($\xi = 1$) (**4b**).

Řešení

a) Systém s operátorovýn přenosem $F_1(p)$ má jediný pól $p_1 = 1/T_1$ který je kladný (leží v pravé polorovině- tento systém je nestabilní.
Systém s operátorovýn přenosem $F_2(p)$ má jediný pól $p_1 = -1/T_2$ který je záporný (leží v levé polorovině- tento systém je stabilní.
b) Pro celkový přenos platí

$$F(p) = \frac{\frac{K_1}{T_1 p - 1}}{1 + \frac{K_1}{T_1 p - 1}\frac{K_2}{T_2 p + 1}} = \frac{K_1}{T_1 p - 1}\frac{(T_1 p - 1)(T_2 p + 1)}{(T_1 p - 1)(T_2 p + 1) + K_1 K_2} = \frac{K_1 (T_2 p + 1)}{(T_1 p - 1)(T_2 p + 1) + K_1 K_2} =$$

$$= \frac{K_1 (T_2 p + 1)}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 - T_2) p - 1 + K_1 K_2} = \frac{K_1}{K_1 K_2 - 1}\frac{(T_2 p + 1)}{\frac{T_1 T_2}{K_1 K_2 - 1} p^2 + \frac{T_1 - T_2}{K_1 K_2 - 1} p + 1} = \frac{K (T_2 p + 1)}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$$

kde pro zesílení, časovou konstantu a činitel tlumení platí

$$K = \frac{K_1}{K_1 K_2 - 1} \qquad T^2 = \frac{T_1 T_2}{K_1 K_2 - 1} \qquad 2\xi T = \frac{T_1 - T_2}{K_1 K_2 - 1}$$

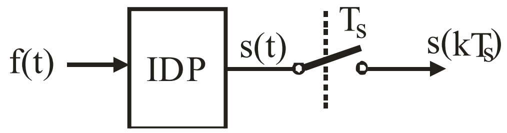
c) Aby byl tento systém na mezi stability musí platit $\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1$

d) Aby byl tento systém na mezi aperiodicity musí platit $\xi = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{\frac{T_1 T_2}{K_1 K_2 - 1}} = \frac{T_1 - T_2}{K_1 K_2 - 1}$. Pro $K_1 = 1, T_1 = 10T_2$ platí

$$2\sqrt{\frac{T_1 T_2}{K_1 K_2 - 1}} = \frac{T_1 - T_2}{K_1 K_2 - 1} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{\frac{10T_2^2}{K_2 - 1}} = \frac{9T_2}{K_2 - 1} \quad \Rightarrow \quad 4\frac{10T_2^2}{K_2 - 1} = \frac{81T_2^2}{(K_2 - 1)^2} \quad \Rightarrow$$

$$40 = \frac{81}{K_2 - 1} \quad \Rightarrow \quad K_2 - 1 = \frac{81}{40} \quad \Rightarrow \quad K_2 = \left(\frac{81}{40} + 1\right) = \frac{121}{40}$$

3) Spojitý signál $f(t) = e^{j\frac{2\pi}{T}t}\left[\sigma(t+a) - \sigma(t-a)\right] \quad t \in (-\infty, +\infty), T > 0, a > 0$ prochází ideální dolní propustí (IDP) s frekvenčním přenosem $F_{IDP}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| \geq \omega_0 \end{cases}$. Na výstupu IDP je signál vzorkován se vzorkovací periodou T_s tak, jak ukazuje následující obrázek. (**15b**)



a) Vypočtěte impulsní charakteristiku ideální dolní propusti IDP $g(t)$ (**5b**) a načrtněte ji (**5b**).

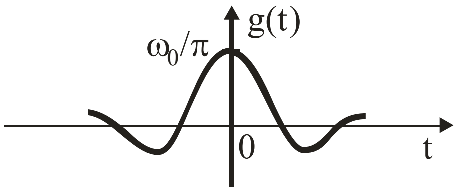
b) Je možno IDP realizovat? Zdůvodněte proč na základě průběhu $g(t)$ (**2b**).

c) Jaká musí být vzorkovací perioda T_s aby při zpětné rekonstrukci signálu $s(kT_s)$ nedošlo ke ztrátě informace?(**3b**).

Řešení

a)

$$g(t) = \mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{-\omega_0}^{+\omega_0} = \frac{e^{+j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j\pi t} = \frac{\omega_0}{\pi}\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}$$



b) IDP nelze realizovat neboť to není kauzální systém (impulsní charakteristika $g(t)$ nabývá nenulových hodnot pro $t < 0$.

c) Vzhledem k tomu, že nejvyšší kmitočet ve spektru signálu $s(t)$ je ω_0 musí pro dobu vzorkování T_s platit $\frac{2\pi}{T_s} > 2\omega_0 \quad \Rightarrow \quad T_s < \frac{\pi}{\omega_0}$.

4) Diskrétní systém je popsán diferenční rovnicí $y(k)=a^2y(k-2)+u(k-1), \quad a\in(0,1)$. (**20b**)

a) Určete jeho operátorový přenos (**2b**)
b) Vypočtěte jeho impulsní charakteristiku (**4b**) a načrtněte ji pro $k=0,1,...6$ (**3b**).
c) Vypočtěte jeho přechodovou charakteristiku (**4b**) a načrtněte ji pro $k=0,1,...6$ (**3b**).
d) Vypočtěte ustálenou hodnotu ($k\to\infty$) přechodové charakteristiky (**4b**)

Řešení

a) $y(k)=a^2y(k-2)+u(k-1)\Rightarrow y(k)-a^2y(k-2)=u(k-1)\Rightarrow F(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-a^2z^{-2}}=\dfrac{z}{z^2-a^2}$

b) Na základě znalosti operátorového přenosu

$$F(z)=\frac{z}{z^2-a^2}=\frac{z}{(z-a)(z+a)}=\frac{A}{(z-a)}+\frac{B}{(z+a)}=\frac{Az+Aa+Bz-Ba}{(z-a)(z+a)} \quad\Rightarrow$$

$$\begin{matrix}Aa-Ba=0\\ A+B=1\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}A=B\\ 2A=1\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}B=1/2\\ A=1/2\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad F(z)=\frac{1/2}{(z-a)}+\frac{1/2}{(z+a)}$$

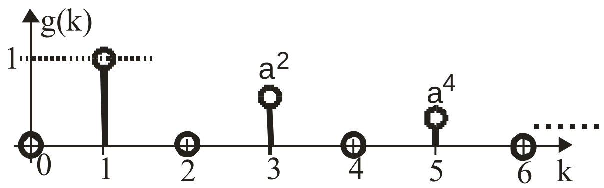
$$g(k)=Z^{-1}\left\{\frac{1/2}{(z-a)}+\frac{1/2}{(z+a)}\right\}=\frac{1}{2}Z^{-1}\left\{\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z+a}\right\}=\frac{1}{2}Z^{-1}\left\{z^{-1}\frac{z}{z-a}\right\}+\frac{1}{2}Z^{-1}\left\{z^{-1}\frac{z}{z+a}\right\}=$$

$$g(k)=\begin{cases}1/2\left[a^{k-1}+(-a)^{k-1}\right] & k\ge 1\\ 0 & k<1\end{cases}$$

Pro hodnoty impulsní charakteristiky pro $k=0,1,...6$ platí:

$$g(0)=0\quad g(1)=1/2\left[a^0+(-a)^0\right]=1\quad g(2)=1/2\left[a^1+(-a)^1\right]=0\quad g(3)=1/2\left[a^2+(-a)^2\right]=a^2$$

$$g(4)=1/2\left[a^3+(-a)^3\right]=0\quad g(5)=1/2\left[a^4+(-a)^4\right]=a^4\quad g(6)=1/2\left[a^5+(-a)^5\right]=0$$



nebo řešením diferenční rovnice $y(k)=a^2y(k-2)+u(k-1)$ pro vstup $u(k)=\delta(k)$

$k=0 \quad g(0)=y(0)=a^2y(-2)+u(-1)=a^2 0+0=0$

$k=1 \quad g(1)=y(1)=a^2y(-1)+u(0)=a^2 0+1=1$

$k=2 \quad g(2)=y(2)=a^2y(0)+u(1)=a^2 0+0=0$

$k=3 \quad g(3)=y(3)=a^2y(1)+u(2)=a^2 1+0=a^2$

$k=4 \quad g(4)=y(4)=a^2y(2)+u(3)=a^2 0+0=0$

$k=5 \quad g(5)=y(5)=a^2y(3)+u(4)=a^2a^2+0=a^4$

$k=6 \quad g(6)=y(6)=a^2y(4)+u(5)=a^2 0+0=0$

nebo dělením polynomu čitatele polynomem jmenovatele operátorového přenosu

$$z:\left(z^2-a^2\right)=z^{-2}+a^2z^{-3}+a^4z^{-5}+....$$

$$\frac{z^{+1}-a^2z^{-1}}{0\ \ +a^2z^{-1}}$$

$$\frac{a^2z^{-1}-a^4z^{-3}}{0\ \ +\ \ a^4z^{-3}}$$

....

c) Pro přechodovou charakteristiku platí $h(k)=\sum_{i=0}^{k} g(i)$

$h(0)=g(0)=0$

$h(1)=h(0)+g(1)=0+1=1$

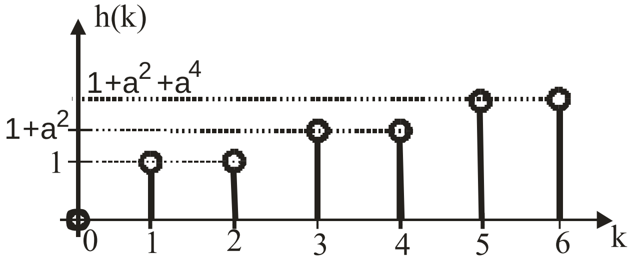
$h(2)=h(1)+g(2)=1+0=1$

$h(3)=h(2)+g(3)=1+a^2$

$h(4)=h(3)+g(4)=1+a^2+0=1+a^2$

$h(5)=h(4)+g(5)=1+a^2+0=1+a^2+a^4$

$h(6)=h(5)+g(6)=1+a^2+a^4+0=1+a^2+a^4$



nebo řešením diferenční rovnice $y(k)=a^2y(k-2)+u(k-1)$ pro vstup $u(k)=\sigma(k)$

$k=0\quad h(0)=y(0)=a^2y(-2)+u(-1)=a^20+0=0$

$k=1\quad h(1)=y(1)=a^2y(-1)+u(0)=a^20+1=1$

$k=2\quad h(2)=y(2)=a^2y(0)+u(1)=a^20+1=1$

$k=3\quad h(3)=y(3)=a^2y(1)+u(2)=a^21+1=1+a^2$

$k=4\quad h(4)=y(4)=a^2y(2)+u(3)=a^21+1=1+a^2$

$k=5\quad h(5)=y(5)=a^2y(3)+u(4)=a^2\left(1+a^2\right)+1=1+a^2+a^4$

$k=6\quad h(6)=y(6)=a^2y(4)+u(5)=a^2\left(1+a^2\right)+1=1+a^2+a^4$

d) Pro ustálenou hodnotu přechodové charakteristiky platí

$$\lim_{k\to\infty}h(k)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k}g(i)=\sum_{i=0}^{\infty}g(i)=\sum_{i=1}^{\infty}1/2\left[a^{i-1}+(-a)^{i-1}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{\infty}a^i+\frac{1}{-a}\sum_{i=1}^{\infty}(-a)^i\right]=$$

$$-\frac{1}{2a}\left[\sum_{i=0}^{\infty}a^i-1-\left(\sum_{i=0}^{\infty}(-a)^i-1\right)\right]=\frac{1}{2a}\left[\sum_{i=0}^{\infty}a^i-\sum_{i=0}^{\infty}(-a)^i\right]=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1+a}\right]=$$

$$=\frac{1}{2a}\frac{1+a-1+a}{(1-a)(1+a)}=\frac{1}{(1-a)(1+a)}=\frac{1}{1-a^2}=1+a^2+a^4+....$$