2009 B/KSAS 22.1.2010, 2.termín	Jméno	ID=

1. Je dán spojitý signál $f\left(t\right)=\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty}\left(t-iT\right)\left[\sigma\left(t-iT\right)-\sigma\left(t-iT-T\right)\right], t\in\left(-\infty,+\infty\right)$. **(15b)**

a) Načrtněte jeho průběh pro $t\in\left(-T,+2T\right)$. **(4b)**

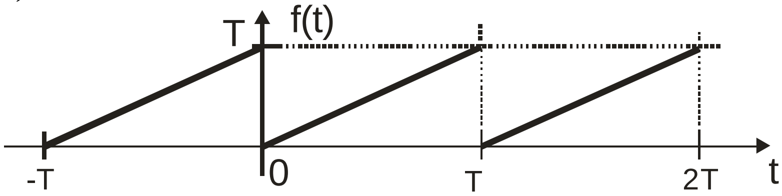
b) Určete, zda je signál periodický. **(1b)**

c) Vypočtěte spektrum signálu. **(5b)**

d) Načrtněte jeho amplitudové a fázové spektrum pro $T=2\pi$ a $m=0,\pm1,\pm2,\pm3$. Popište osy. **(5b)**

Řešení:

a)



b)

Z obrázku je patrno, že signál je periodický se základní periodou T a základním kmitočtem $\omega_0=2\pi/T$

c) Pro koeficient c_0 (stejnosměrná složka signálu) Fourierovy řady platí

$$c_0=\frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(t\right)dt=\frac{1}{T}\int\limits_0^T tdt=\frac{1}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T=\frac{1}{T}\frac{T^2}{2}=\frac{T}{2}$$

Pro ostatní koeficienty $c_m, m=\pm1,\pm2,....$ platí (uvažte, že $\omega_0T=2\pi$):

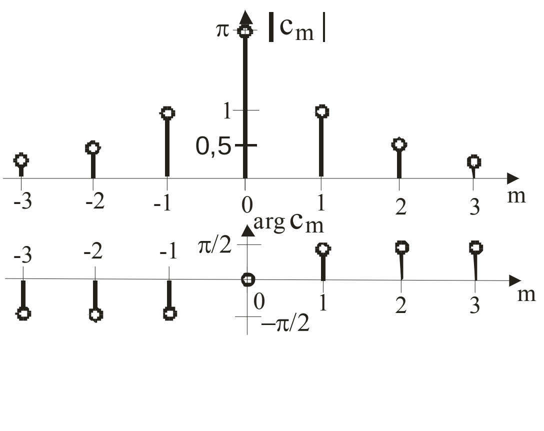
$$c_m=\frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(t\right)e^{-jm\omega_0t}dt=\frac{1}{T}\int\limits_0^T te^{-jm\omega_0t}dt=\begin{vmatrix} u=t & u'=1 \\ v'=e^{-jm\omega_0t} & v=\dfrac{e^{-jm\omega_0t}}{-jm\omega_0}\end{vmatrix}=\frac{1}{T}\left[t\frac{e^{-jm\omega_0t}}{-jm\omega_0}\right]_0^T-\frac{1}{T}\int\limits_0^T\frac{e^{-jm\omega_0t}}{-jm\omega_0}dt=$$

$$=\frac{1}{T}\left[T\frac{e^{-jm\omega_0T}}{-jm\omega_0}\right]+\frac{1}{jm\omega_0T}\int\limits_0^T e^{-jm\omega_0t}dt=T\frac{e^{-jm2\pi}}{-jm2\pi}+\frac{1}{jm2\pi}\left[\frac{e^{-jm\omega_0t}}{-jm\omega_0}\right]_0^T=j\frac{T}{m2\pi}+\frac{1}{m^2 2\pi\omega_0}\left(e^{-jm\omega_0T}-1\right)=$$

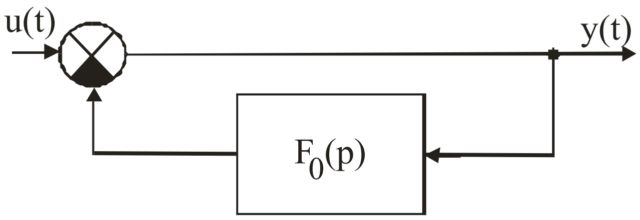
$$=j\frac{T}{m2\pi}+\frac{1}{m^2 2\pi\omega_0}\left(1-1\right)=j\frac{T}{m2\pi}$$

$$\left|c_m\right|=\left|j\frac{T}{m2\pi}\right|=\frac{T}{2\pi}\left|\frac{1}{m}\right| \qquad \arg c_m=\begin{cases}+\pi/2 & m\geq1\\ -\pi/2 & m\leq-1\end{cases}$$

d) Pro $T=2\pi$ platí $c_0=\pi$ a pro ostatní koeficienty platí $\left|c_m\right|=\left|\dfrac{1}{m}\right|$ $\qquad \arg c_m=\begin{cases}+\pi/2 & m\geq1\\ -\pi/2 & m\leq-1\end{cases}$.



2. Na vstupu spojitého systému působí signál $u(t)=\sigma(t)e^{-2t}$ a na výstupu je signál $y(t)=\sigma(t)\left(7e^{-2t}-e^{-0,5t}\right)/6$ tak, jak ukazuje obrázek. (**20b**)



a) Určete operátorový přenos $F_0(p)$. (**12b)**

b) Napište diferenciální rovnici systému jehož vstup je $u(t)$ a výstup je $y(t)$ (**2b**).

c) Vypočtěte impulsovou charakteristiku systému s přenosem $F_0(p)$ (**3b**) a načrtněte ji (**3b**).

Řešení

a) Pro Laplaceův obraz vstupního a výstupního signálu platí

$$U(p)=\mathrm{L}\{u(t)\}=\mathrm{L}\left\{e^{-2t}\right\}=\frac{1}{p+2}$$

$$Y(p)=\mathrm{L}\{y(t)\}=\frac{1}{6}\mathrm{L}\left\{7e^{-2t}-e^{-0,5t}\right\}=\frac{1}{6}\left(\frac{7}{p+2}-\frac{1}{p+0,5}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{7}{p+2}-\frac{2}{2p+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\frac{14p+7-2p-4}{(p+2)(2p+1)}==\frac{1}{6}\frac{12p+3}{(p+2)(2p+1)}$$

Pro operátorový přenos celého spojení platí

$$F(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{\frac{1}{6}\frac{12p+3}{(2p+1)(p+2)}}{\frac{1}{(p+2)}}=\frac{1}{6}\frac{12p+3}{2p+1}=\frac{1}{2}\frac{4p+1}{2p+1}\ .$$

Na základě pravidel blokové algebry je

$$F(p)=\frac{1}{1+F_0(p)}\quad\Rightarrow\quad 1+F_0(p)=\frac{1}{F(p)}\quad\Rightarrow\quad F_0(p)=\frac{1}{F(p)}-1$$

A dosazením za $F(p)$ obdržíme

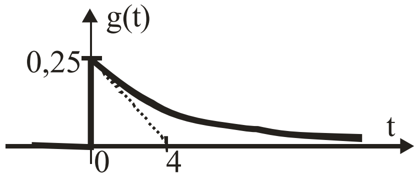
$$F_0(p)=\frac{1}{F(p)}-1=2\frac{2p+1}{4p+1}-1=\frac{4p+2}{4p+1}-1=\frac{4p+2-4p-1}{4p+1}=\frac{1}{4p+1}$$

b) Pro diferenciální rovnici platí

$$F(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{2p+0,5}{2p+1}\quad\Rightarrow\quad Y(p)(2p+1)=U(p)(2p+0,5)\quad\Rightarrow\quad 2y'+y=2u'+0,5u$$

c) Pro impulsovou charakteristiku platí

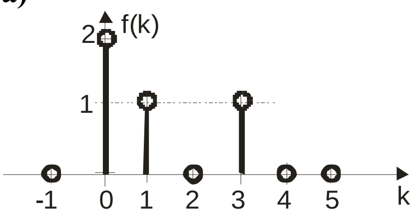
$$g(t)=\mathrm{L}^{-1}\{F_0(p)\}=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4p+1}\right\}=0,25e^{-t/4}\qquad t\geq 0$$



3. Je dán diskrétní signál $f(k), k \in (-\infty, +\infty)$ pro jehož hodnoty platí $f(0)=2,\ f(1)=f(3)=1$ a hodnoty $f(k)$ pro všechna ostatní k jsou nulové. (**15b**)

a) Načrtněte tento signál pro $k=-1,0,1,2,3,4,5$. Označte a ocejchujte osy. (**4b**)
b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu (**6b**)
c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum signálu. Označte a ocejchujte osy (**5b**)

Řešení:
a)



b) Signál není periodický. Hodnoty vzorků jsou $f(0)=2,\ f(1)=1,\ f(2)=0,\ f(3)=1$ a ostatní vzorky jsou nulové. Pro spektrum platí DFT kde $N=4$. Platí

$$F(m)=\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{4}k} = f(0)e^{-jm\frac{\pi}{2}0} + f(1)e^{-jm\frac{\pi}{2}1} + f(2)e^{-jm\frac{\pi}{2}2} + f(3)e^{-jm\frac{\pi}{2}3} =$$

$$= 2e^{-jm\frac{\pi}{2}0} + 1e^{-jm\frac{\pi}{2}1} + 0e^{-jm\frac{\pi}{2}2} + 1e^{-jm\frac{\pi}{2}3} = 2 + e^{-jm\frac{\pi}{2}1} + e^{-jm\frac{\pi}{2}3}$$

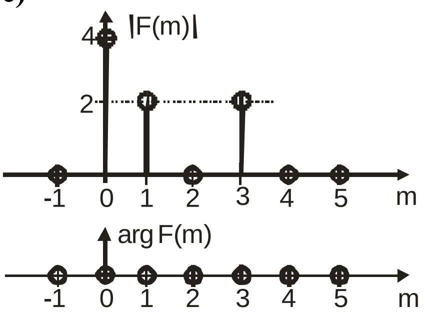
$$F(0) = 2 + e^{-j0\frac{\pi}{2}1} + e^{-j0\frac{\pi}{2}3} = 2+1+1=4 \quad |F(0)|=4 \quad \arg F(0)=0$$

$$F(1) = 2 + e^{-j1\frac{\pi}{2}1} + e^{-j1\frac{\pi}{2}3} = 2-j+j=2 \quad |F(1)|=2 \quad \arg F(1)=0$$

$$F(2) = 2 + e^{-j2\frac{\pi}{2}1} + e^{-j2\frac{\pi}{2}3} = 2-1-1=0 \quad |F(1)|=0 \quad \arg F(1)=0$$

$$F(3) = 2 + e^{-j3\frac{\pi}{2}1} + e^{-j3\frac{\pi}{2}3} = 2+j-j=2 \quad |F(1)|=2 \quad \arg F(1)=0$$

c)



4. Diskrétní systém je popsán diferenční rovnicí $y(k)-y(k-1)=u(k-2)$ (**20b**)

a) Určete jeho operátorový přenos (**2b**)

b) Vypočtěte (**3b**) a načrtněte (**3b**) jeho přechodovou charakteristiku pro $k=0,1,....4$.

c) Na vstupu působí signál $u(k)=\sigma(k)a^k$, $k=0,1,2,...$ Vypočtěte výstupní signál $y(k)$ (**4b**) a načrtněte ho pro $a\in(0,1)$ a pro $k=0,1,....4$ (**4b**)

d) Vypočtěte ustálenou hodnotu ($k\to\infty$) výstupního signálu $y(k)$ z bodu c) tohoto příkladu.(**4b**)

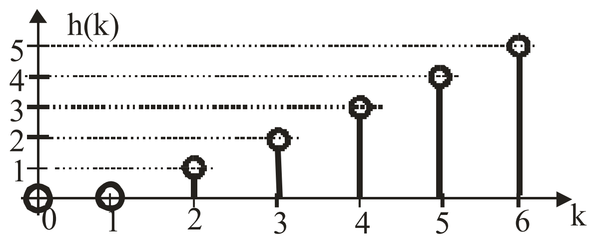
Řešení

a) Pro operátorový přenos platí $F(z)=\dfrac{z^{-2}}{1-z^{-1}}=\dfrac{1}{z(z-1)}$

b) Pro obraz přechodové charakteristiky platí

$$H(z)=Z\{\sigma(k)\}F(z)=\frac{z}{z-1}\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{(z-1)^2}$$

$$h(k)=Z^{-1}\{H(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{1}{(z-1)^2}\right\}=Z^{-1}\left\{z^{-1}\frac{z}{(z-1)^2}\right\}=\begin{cases}k-1 & k\ge 1\\ 0 & k<1\end{cases}$$



nebo pomocí řešení diferenční rovnice $y(k)-y(k-1)=u(k-2)$ pro vstup $u(k)=\sigma(k)$

$k=0 \quad h(0)=y(0)=y(-1)+u(-2)=0+0=0$

$k=1 \quad h(1)=y(1)=y(0)+u(-1)=0+0=0$

$k=2 \quad h(2)=y(2)=y(1)+u(0)=0+1=1$

$k=3 \quad h(3)=y(3)=y(2)+u(1)=1+1=2$

$k=4 \quad h(4)=y(4)=y(3)+u(2)=2+1=3$

nebo dělením polynomu čitatele polynomem jmenovatele Z obrazu přechodové charakteristiky

$1:(z^2-2z+1)=z^{-2}+2z^{-3}+3z^{-4}+....$

$$\frac{1-\quad 2z^{-1}+\ z^{-2}}{0\ +2z^{-1}-z^{-2}}$$

$$\frac{2z^{-1}-4z^{-2}+2z^{-3}}{0\quad +3z^{-2}-2z^{-3}}$$

....

c) Pro obraz výstupní posloupnosti platí

$$Y(z) = Z\{u(k)\}F(z) = \frac{z}{z-a}\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{(z-a)(z-1)} = \frac{A}{(z-a)} + \frac{B}{(z-1)} =$$

$$= \frac{Az - A + Bz - Ba}{(z-a)(z-1)} \Rightarrow \begin{matrix} A + B = 0 \\ -A - Ba = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = -B \\ B(1-a) = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = -1/(1-a) \\ B = 1/(1-a) \end{matrix}$$

$$Y(z) = \frac{-1}{(1-a)(z-a)} + \frac{1}{(1-a)(z-1)} = \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{(z-a)}\right]$$

$$y(k) = Z^{-1}\{Y(z)\} = \frac{1}{1-a}Z^{-1}\left\{\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{(z-a)}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{1-a}\left[\sigma(k-1) - a^{k-1}\right] & k \ge 1 \\ 0 & k < 1 \end{cases}$$

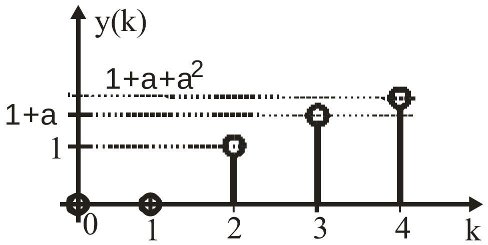
$$y(0) = 0$$

$$y(1) = \frac{1}{1-a}\left[\sigma(1-1) - a^{1-1}\right] = \frac{1}{1-a}[1-1] = 0$$

$$y(2) = \frac{1}{1-a}\left[\sigma(2-1) - a^{2-1}\right] = \frac{1}{1-a}[1-a] = 1$$

$$y(3) = \frac{1}{1-a}\left[\sigma(3-1) - a^{3-1}\right] = \frac{1}{1-a}\left[1-a^2\right] = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1 + a$$

$$y(4) = \frac{1}{1-a}\left[\sigma(4-1) - a^{4-1}\right] = \frac{1}{1-a}\left[1-a^3\right] = \frac{(1-a)\left(1+a+a^2\right)}{1-a} = 1 + a + a^2$$



nebo pomocí řešení diferenční rovnice $y(k) - y(k-1) = u(k-2)$ pro vstup $u(k) = \sigma(k)a^k$

$k = 0 \quad y(0) = y(-1) + u(-2) = 0 + 0 = 0$

$k = 1 \quad y(1) = y(0) + u(-1) = 0 + 0 = 0$

$k = 2 \quad y(2) = y(1) + u(0) = 0 + a^0 = 1$

$k = 3 \quad y(3) = y(2) + u(1) = 1 + a^1 = 1 + a$

$k = 4 \quad y(4) = y(3) + u(2) = 1 + a + a^2$

d) Pro $k \ge 1$ platí $y(k) = \frac{1}{1-a}\left[\sigma(k-1) - a^{k-1}\right]$ a tedy pro $a \in (0,1)$ bude

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1-a}\left[\sigma(k-1) - a^{k-1}\right] = \frac{1}{1-a}[1-0] = \frac{1}{1-a}$$