2009 B/KSAS 1.termín,sk.B, 14.1.2010	Jméno	ID=

1. Je dán spojitý signál $f(t) = -1 - 2\sin 2t + \cos 4t,\ t \in (-\infty, +\infty)$. (**15b**)

a) Určete, zda je signál periodický. **(3b)**
b) Vypočtěte spektrum signálu. **(5b)**
c) Načrtněte jeho amplitudové a fázové spektrum. Popište osy. **(5b)**
d) Vypočtěte výkon signálu **(2b)**

Řešení:

a) Signál $\sin 2t$ je periodický s periodou $P_1 = \pi$, signál $\cos 4t$ je periodický s periodou $P_2 = 2\pi/4 = \pi/2$. Aby byl signál $f(t)$ periodický musí být poměr těchto period racionální číslo. Pro poměr period platí

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\pi}{\pi/2} = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad 1P_1 = 2P_2 = P = \pi$$. Signál $f(t)$ je tedy periodický se základní periodou $P = \pi$ a základním kmitočtem $\omega_0 = 2\pi/P = 2$

b) Signál $f(t)$ lze vyjádřit ve tvaru konečné Fourierovy řady

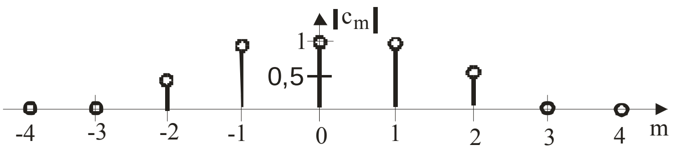
$$f(t) = -1 - 2\sin 2t + \cos 4t = -1 - 2\sin \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t = -1 - 2\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} + \frac{e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}}{2} =$$

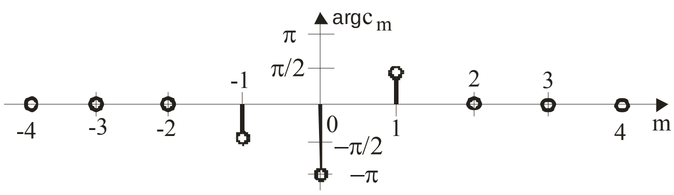
$$= -1 + je^{j\omega_0 t} - je^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega_0 t}$$

Tedy nenulové jsou pouze koeficienty $c_0 = -1, c_1 = j, c_{-1} = -j, c_2 = 0,5, c_{-2} = 0,5$

c) Platí

$c_0 = -1$	$\lvert c_0\rvert = 1$	$\arg c_0 = -\pi$
$c_1 = j$	$\lvert c_1\rvert = 1$	$\arg c_1 = +\pi/2$
$c_{-1} = -j$	$\lvert c_{-1}\rvert = 1$	$\arg c_{-1} = -\pi/2$
$c_2 = 0,5$	$\lvert c_2\rvert = 0,5$	$\arg c_2 = 0$
$c_{-2} = 0,5$	$\lvert c_{-2}\rvert = 0,5$	$\arg c_{-2} = 0$





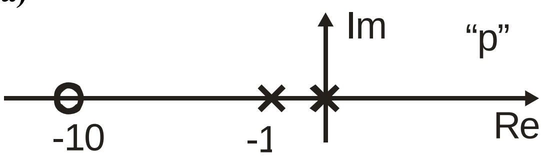
d) Pro výkon signálu platí (v kmitočtové oblasti):

$$P_W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2 = |c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_{-1}|^2 + |c_2|^2 + |c_{-2}|^2 = 1 + 1 + 1 + 1/4 + 1/4 = 3,5$$

2. Spojitý lineární systém bez dopravního zpoždění má dva póly $p_1 = 0;\ p_2 = -1$ a jednu nulu $n_1 = -10$. Poměr koeficientů u nejvyšších mocnin čitatele a jmenovatele operátorového přenosu je 1. (**20b**)

a) načrtněte rozložení pólů a nul (**3b**)
b) rozhodněte o stabilitě systému (**2b**)
c) určete operátorový přenos (**5b**)
d) vypočtěte impulsovou charakteristiku a načrtněte ji. Označte osy (**5b)**
e) načrtněte amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Ocejchujte osy (**5b**)

Řešení
a)



b) Jeden pól leží na imaginární ose a systém je tedy na mezi stability.

c) $F(p) = \dfrac{(p+10)}{p(p+1)} = \dfrac{10(0{,}1p+1)}{p(p+1)}$

d) Impulsová charakteristika

$$g(t) = L^{-1}\{F(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{(p+10)}{p(p+1)}\right\}$$

$$\frac{(p+10)}{p(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p+1)} = \frac{Ap + A + Bp}{p(p+1)} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} A+B=1 \\ A=10 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} B=-9 \\ A=10 \end{matrix}$$

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{10}{p} - \frac{9}{(p+1)}\right\} = \begin{cases} 10-9e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$g(0) = 10 - 9 = 1 \quad g(\infty) = 10$

Nulové body funkce $g(t)$:

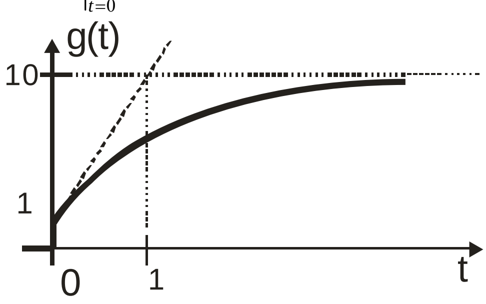
$g(t) = 10 - 9e^{-t} = 0$ Rovnice nemá v intervalu $t \in (0, \infty)$ řešení tj. funkce nemá nulové body.

Extrémy funkce $g(t)$:

$\dfrac{dg(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(10 - 9e^{-t}\right) = 9e^{-t} \overset{!}{=} 0$ Rovnice nemá v intervalu $t \in (0, \infty)$ řešení tj. funkce nemá lokální extrémy .

Hodnota derivace (směrnice tečny) v bodě t=0:

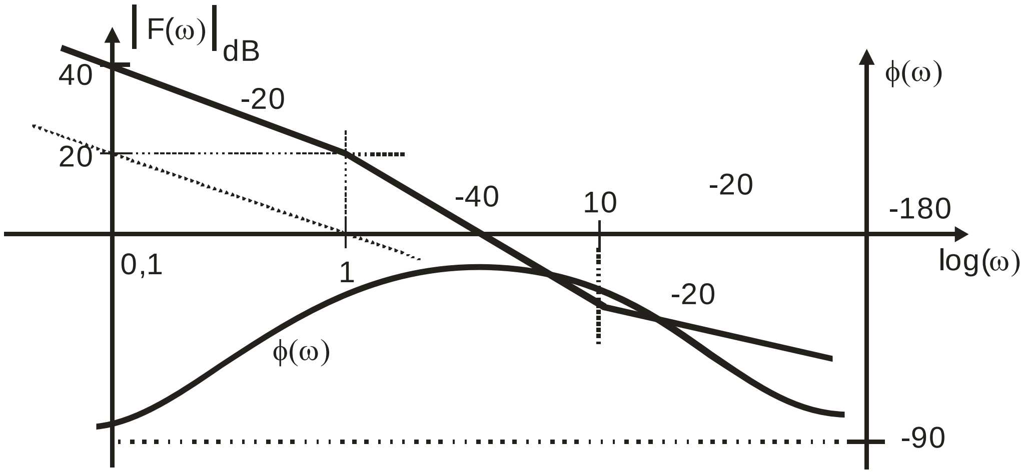
$$\left.\frac{dg(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.9e^{-t}\right|_{t=0} = 9 > 0$$



2009 B/KSAS 1.termín,sk.B, 14.1.2010	Jméno	ID=

e) Frekvenční charakteristika

$$F(j\omega)=\frac{10(0,1j\omega+1)}{j\omega(j\omega+1)}=\frac{10\sqrt{0,01\omega^2+1}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}e^{j(-\pi/2+arctg\,0,1\omega-arctg\,\omega)}$$



2009 B/KSAS 1.termín,sk.B, 14.1.2010	Jméno	ID=

3. Je dán diskrétní signál $f(k) = 4\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(k+1-4i), \quad k \in (-\infty, +\infty)$. (**15b**)

a) Načrtněte tento signál pro $k = 0,1,2,...12$. (**4b**)

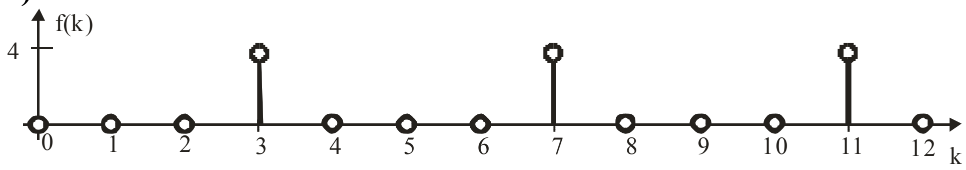
b) Je tento signál periodický? Pokud ano, určete periodu. (**3b**)

c) Vypočtěte jeho spektrum. (**4b**)

d) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum pro $m = 0,1,2,3$. (**4b**)

Řešení

a)



b) Z obrázku je patrno, že signál je periodický s periodou $N = 4$.

c) Pro výpočet koeficientů diskrétní Fourierovy řady platí

$c_m = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{-jm\frac{2\pi}{4}k} \quad m = 0,1,2,3$. Jelikož $f(0) = f(1) = f(2) = 0, \quad f(3) = 4$ bude

$$c_m = \frac{1}{4} f(3) e^{-jm\frac{2\pi}{4}3} = e^{-jm\frac{\pi}{2}3} \quad m = 0,1,2,3$$

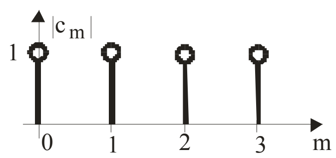
$c_0 = +1 \quad |c_0| = 1 \quad \arg c_0 = 0$

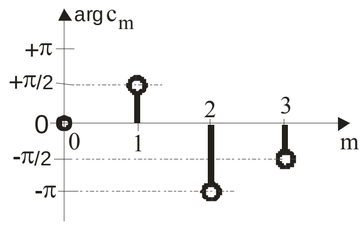
$c_1 = +j \quad |c_1| = 1 \quad \arg c_1 = \pi/2$

$c_2 = -1 \quad |c_2| = 1 \quad \arg c_2 = -\pi$

$c_3 = -j \quad |c_3| = 1 \quad \arg c_3 = -\pi/2$

d)





2009 B/KSAS 1.termín,sk.B, 14.1.2010	Jméno	ID=

4. Diskrétní systém má impulsovou charakteristiku $g(k)=\frac{1}{2}\left[\sigma(k)-\sigma(k-2)\right]$. (**20b**)

a) Načrtněte $g(k)$ pro $k=0,1,2,3,4,5,6$. (**5b**)

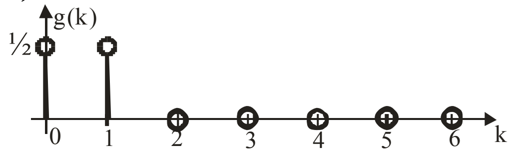
b) Vypočtěte a načrtněte přechodovou charakteristiku $h(k)$ pro $k=0,1,2,3,4,5,6$. (**5b**)

c) Určete operátorový přenos systému. (**5b**)

d) Napište diferenční rovnici systému a slovně popište chování systému. (**5b**)

Řešení

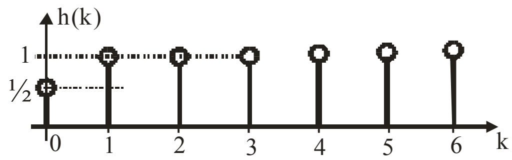
a)



b) Platí $h(k)=\sum_{i=0}^{k} g(i)$ a tedy

$h(0)=g(0)=1/2$ $\qquad$ $h(1)=h(0)+g(1)=1/2+1/2=1$

$h(2)=h(1)+g(2)=1+0=1$ $\qquad$ $h(k)=1 \quad k\geq 3$



c) Platí:

$$F(z)=Z\{g(k)\}=Z\left\{\frac{1}{2}\left[\sigma(k)-\sigma(k-2)\right]\right\}=\frac{1}{2}\left[Z\{\sigma(k)\}-Z\{\sigma(k-2)\}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-1}z^{-2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{z}{z-1}\left(1-z^{-2}\right)=\frac{1}{2}\frac{z}{z-1}\frac{z^2-1}{z^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\frac{(z-1)(z+1)}{z}=\frac{1}{2}\frac{z+1}{z}=\frac{1}{2}\left(1+z^{-1}\right)$$

d) Platí:

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1}{2}\left(1+z^{-1}\right) \quad\Rightarrow\quad Y(z)=\frac{1}{2}\left(1+z^{-1}\right)U(z)$$

$$y(k)=\frac{1}{2}\left[u(k)+u(k-1)\right]$$

Systém realizuje plovoucí průměr ze 2 po sobě jdoucích vstupních hodnot.