2009 B/KSAS 14.1.2010, sk.A	Jméno	ID=

1. Je dán spojitý signál $f(t) = 1 - 2\cos 2t + \sin 3t,\ t \in (-\infty, +\infty)$. (**15b**)

a) Určete, zda je signál periodický. **(3b)**
b) Vypočtěte spektrum signálu. **(5b)**
c) Načrtněte jeho amplitudové a fázové spektrum. Popište osy. **(5b)**
d) Vypočtěte výkon signálu **(2b)**

Řešení:

a) Signál $\cos 2t$ je periodický s periodou $P_1 = \pi$, signál $\sin 3t$ je periodický s periodou $P_2 = 2\pi/3$. Aby byl signál $f(t)$ periodický musí být poměr těchto period racionální číslo. Pro poměr period platí

$\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{\pi}{2\pi/3} = \dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2P_1 = 3P_2 = P = 2\pi$. Signál $f(t)$ je tedy periodický se základní periodou $P = 2\pi$ a základním kmitočtem $\omega_0 = 2\pi / P = 1$

b) Signál $f(t)$ lze vyjádřit ve tvaru konečné Fourierovy řady

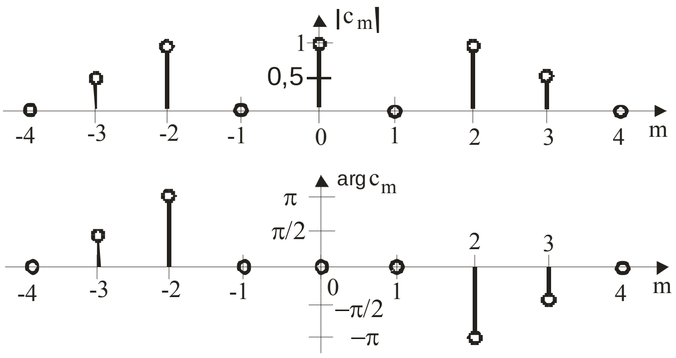
$$f(t) = 1 - 2\cos 2t + \sin 3t = 1 - 2\cos 2\omega_0 t + \sin 3\omega_0 t = 1 - 2\frac{e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{j3\omega_0 t} - e^{-j3\omega_0 t}}{2j} =$$

$$= 1 - e^{j2\omega_0 t} - e^{-j2\omega_0 t} - \frac{1}{2} j e^{j3\omega_0 t} + \frac{1}{2} j e^{-j3\omega_0 t}$$

Tedy nenulové jsou pouze koeficienty $c_0 = 1, c_2 = -1, c_{-2} = -1, c_3 = -0{,}5j, c_{-3} = 0{,}5j$

c) Platí

$$\begin{array}{lll}
c_0 = 1 & |c_0| = 1 & \arg c_0 = 0 \\
c_2 = -1 & |c_2| = 1 & \arg c_2 = -\pi \\
c_{-2} = -1 & |c_{-2}| = 1 & \arg c_{-2} = +\pi \\
c_3 = -0{,}5j & |c_3| = 0{,}5 & \arg c_3 = -\pi/2 \\
c_{-3} = 0{,}5j & |c_{-3}| = 0{,}5 & \arg c_{-3} = \pi/2
\end{array}$$



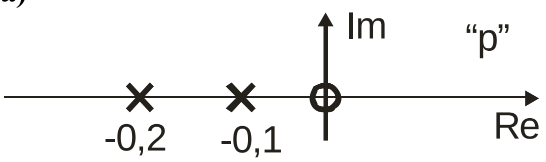
d) Pro výkon signálu platí (v kmitočtové oblasti):

$$P_W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2 = |c_0|^2 + |c_2|^2 + |c_{-2}|^2 + |c_3|^2 + |c_{-3}|^2 = 1 + 1 + 1 + 1/4 + 1/4 = 3{,}5$$

2. Spojitý lineární systém bez dopravního zpoždění má dva póly $p_1 = -0,1;\ p_2 = -0,2$ a jednu nulu $n_1 = 0$. Poměr koeficientů u nejvyšších mocnin čitatele a jmenovatele operátorového přenosu je 0,2. (**20b**)

a) načrtněte rozložení pólů a nul (**3b**)
b) rozhodněte o stabilitě systému (**2b**)
c) určete operátorový přenos (**5b**)
d) vypočtěte impulsovou charakteristiku a načrtněte ji. Označte osy (**5b)**
e) načrtněte amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Ocejchujte osy (**5b**)

Řešení
a)



b) Oba póly systému leží v levé polorovině a systém je tedy stabilní.

c) $F\left(p\right) = \dfrac{0,2p}{\left(p+0,1\right)\left(p+0,2\right)} = \dfrac{10p}{\left(10p+1\right)\left(5p+1\right)}$

d) Impulsová charakteristika

$$g\left(t\right) = L^{-1}\left\{F\left(p\right)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{10p}{\left(10p+1\right)\left(5p+1\right)}\right\}$$

$$\frac{10p}{\left(10p+1\right)\left(5p+1\right)} = \frac{A}{\left(10p+1\right)} + \frac{B}{\left(5p+1\right)} = \frac{5Ap + A + 10Bp + B}{\left(10p+1\right)\left(5p+1\right)} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 5A + 10B = 10 \\ A + B = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 5A - 10A = 10 \quad \Rightarrow \quad -5A = 10 \quad \Rightarrow \quad A = -2 \quad B = 2$$

$$g\left(t\right) = L^{-1}\left\{\frac{-2}{\left(10p+1\right)} + \frac{2}{\left(5p+1\right)}\right\} = 2L^{-1}\left\{-\frac{0,1}{\left(p+0,1\right)} + \frac{0,2}{\left(p+0,2\right)}\right\} = 2\left(-0,1e^{-0,1t} + 0,2e^{-0,2t}\right)$$

$$g\left(0\right) = 2\left(-0,1+0,2\right) = 0,2 \qquad g\left(\infty\right) = 0$$

Nulové body funkce $g\left(t\right)$:

$$g\left(t\right) = 2\left(-0,1e^{-0,1t} + 0,2e^{-0,2t}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0,1e^{-0,1t} = 0,2e^{-0,2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{-0,1t}}{e^{-0,2t}} = \frac{0,2}{0,1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{0,1t} = 2 \quad \Rightarrow \quad 0,1t = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 10\ln 2$$

Extrémy funkce $g\left(t\right)$:

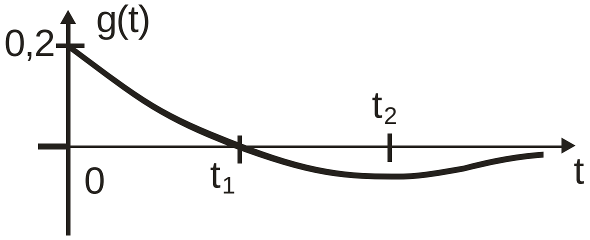
$$\frac{dg\left(t\right)}{dt} = 2\left(0,01e^{-0,1t} - 0,04e^{-0,2t}\right) = 0 \Rightarrow 0,01e^{-0,1t} = 0,04e^{-0,2t} \Rightarrow \frac{e^{-0,1t}}{e^{-0,2t}} = \frac{0,04}{0,01} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{0,1t} = 4 \Rightarrow 0,1t = \ln 4 \Rightarrow t_2 = 10\ln 4$$

Hodnota derivace (směrnice tečny) v bodě t=0:

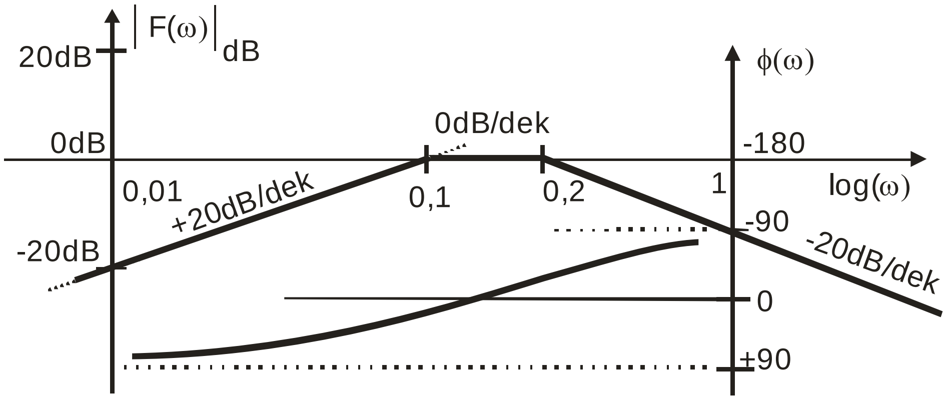
$$\left.\frac{dg\left(t\right)}{dt}\right|_{t=0} = 2\left.\left(0,01e^{-0,1t} - 0,04e^{-0,2t}\right)\right|_{t=0} = 2\left(0,01 - 0,04\right) = -0,06 < 0$$

2009 B/KSAS 14.1.2010, sk.A	Jméno	ID=



e) Frekvenční charakteristika

$$F(j\omega)=\frac{10j\omega}{(10j\omega+1)(5j\omega+1)}=\frac{10\omega}{\sqrt{100\omega^2+1}\sqrt{25\omega^2+1}}e^{j(\pi/2-arctg10\omega-arctg5\omega)}$$



3. Je dán diskrétní signál $f(k) = 4\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(k-1+4i), \quad k \in (-\infty, +\infty)$. (**15b**)

a) Načrtněte tento signál pro $k = 0,1,2,\ldots 12$. (**4b**)

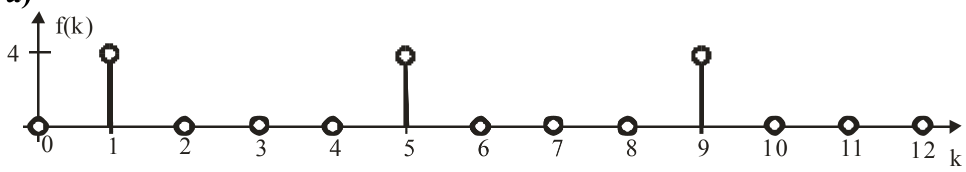
b) Je tento signál periodický? Pokud ano, určete periodu. (**3b**)

c) Vypočtěte jeho spektrum. (**4b**)

d) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum pro $m = 0,1,2,3$. (**4b**)

Řešení

a)



b) Z obrázku je patrno, že signál je periodický s periodou $N = 4$.

c) Pro výpočet koeficientů diskrétní Fourierovy řady platí

$c_m = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{-jm\frac{2\pi}{4}k} \quad m = 0,1,2,3$. Jelikož $f(0) = f(2) = f(3) = 0, \quad f(1) = 4$ bude

$$c_m = \frac{1}{4} f(1) e^{-jm\frac{2\pi}{4}1} = e^{-jm\frac{\pi}{2}} \quad m = 0,1,2,3$$

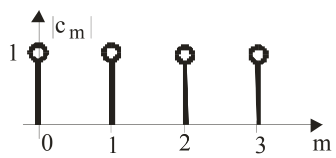
$$c_0 = +1 \quad |c_0| = 1 \quad \arg c_0 = 0$$

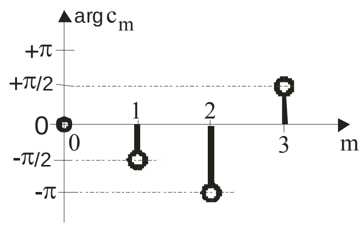
$$c_1 = -j \quad |c_1| = 1 \quad \arg c_1 = -\pi/2$$

$$c_2 = -1 \quad |c_2| = 1 \quad \arg c_2 = -\pi$$

$$c_3 = +j \quad |c_3| = 1 \quad \arg c_3 = +\pi/2$$

d)





4. Diskrétní systém má impulsovou charakteristiku $g(k) = \sum_{i=0}^{2} \delta(k-1-i)$. (**20b**)

a) Načrtněte $g(k)$ pro $k = 0,1,2,3,4,5,6$. (**5b**)

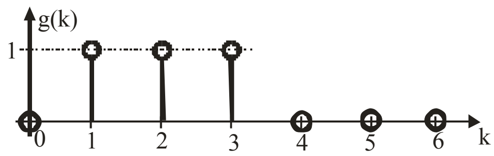
b) Vypočtěte a načrtněte přechodovou charakteristiku $h(k)$ pro $k = 0,1,2,3,4,5,6$. (**5b**)

c) Určete operátorový přenos systému. (**5b**)

d) Napište diferenční rovnici systému a slovně popište chování systému. (**5b**)

Řešení

a)

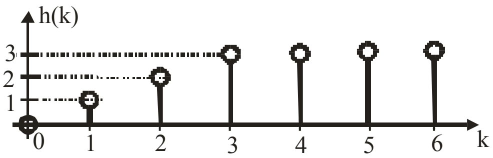


b) Platí $h(k) = \sum_{i=0}^{k} g(i)$ a tedy

$h(0) = g(0) = 0$ $\qquad$ $h(1) = h(0) + g(1) = 0 + 1 = 1$

$h(2) = h(1) + g(2) = 1 + 1 = 2$ $\qquad$ $h(3) = h(2) + g(3) = 2 + 1 = 3$

$h(k) = 3 \quad k > 3$



c) Platí:

$$F(z) = Z\{g(k)\} = Z\left\{\sum_{i=0}^{2} \delta(k-1-i)\right\} = \sum_{i=0}^{2} Z\{\delta(k-1-i)\} = \left(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right) = \frac{z^2 + z + 1}{z^3}$$

d) Platí:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \left(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right) \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \left(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right)U(z)$$

$$y(k) = \left[u(k-1) + u(k-2) + u(k-3)\right]$$

Systém sčítá 3 po sobě jdoucí vstupní hodnoty.