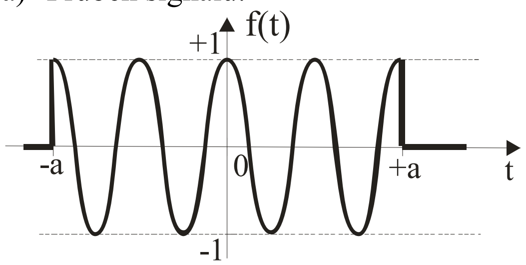
2007 B/KSAS 3.termín, 1.2.2008	Jméno:	ID=

1. Je dán spojitý signál $f(t)=\left[\sigma(t+a)-\sigma(t-a)\right]cos\,\omega_0 t,\quad a>0, a<\infty$. (**15b**)

a) Načrtněte průběh signálu (**3b).**
b) Vypočtěte spektrum signálu a načrtněte ho. (**6b**)
c) Načrtněte spektrum pro limitní případ $a\to+\infty$. Pomůcka: $\lim\limits_{a\to\infty} a\dfrac{\sin\left[a(\omega-\omega_0)\right]}{a(\omega-\omega_0)}=\pi\delta(\omega-\omega_0)$ (**6b**).

Řešení

a) Průběh signálu.

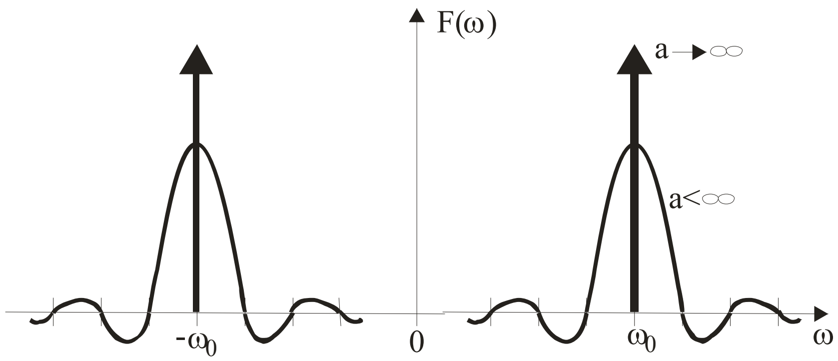


b) Spektrum signálu

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-a}^{+a}\cos\omega_0 t e^{-j\omega t}dt=\int_{+a}^{+a}\frac{e^{+j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2}\int_{-a}^{+a}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt+\int_{-a}^{+a}e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j(\omega-\omega_0)t}}{-j(\omega-\omega_0)}\right]_{-a}^{+a}+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j(\omega+\omega_0)t}}{-j(\omega+\omega_0)}\right]_{-a}^{+a}=\frac{e^{-j(\omega-\omega_0)a}-e^{+j(\omega-\omega_0)a}}{-2j(\omega-\omega_0)}+\frac{e^{-j(\omega+\omega_0)a}-e^{+j(\omega+\omega_0)a}}{-j2(\omega+\omega_0)}=$$

$$=\frac{\sin(\omega-\omega_0)a}{(\omega-\omega_0)}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)a}{(\omega+\omega_0)}=a\frac{\sin(\omega-\omega_0)a}{(\omega-\omega_0)a}+a\frac{\sin(\omega+\omega_0)a}{(\omega+\omega_0)a}$$



c) Vzhledem k pomůcce platí:

$$\lim_{a\to\infty}F(\omega,a)=\lim_{a\to\infty}a\frac{\sin(\omega-\omega_0)a}{(\omega-\omega_0)a}+\lim_{a\to\infty}a\frac{\sin(\omega+\omega_0)a}{(\omega+\omega_0)a}=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

2007 B/KSAS 3.termín, 1.2.2008	Jméno:	ID=

2. Na vstupu spojitého systému s operátorovým přenosem $F(p) = K/(Tp+1)$ působí spojitý signál $u(t) = \sigma(t)e^{j\omega_0 t}$. (**20 b**):

a) Určete časový průběh výstupního signálu. (**10b**)
b) Vypočtený časový průběh sestává ze dvou částí. Vysvětlete jejich význam. (**5 b**)
c) Určete amplitudu výstupního harmonického signálu po odeznění přechodových dějů. (**5b**)

Řešení

a) Pro obraz vstupu platí:

$$U(p) = \mathscr{L}\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{p - j\omega_0}.$$

Laplaceův obraz výstupního signálu bude

$$Y(p) = \mathscr{L}\left\{y(t)\right\} = F(p)U(p) = \frac{K}{Tp+1}\frac{1}{p-j\omega_0} = \frac{A}{Tp+1} + \frac{B}{p-j\omega_0} = \frac{Ap - jA\omega_0 + BTp + B}{(Tp+1)(p-j\omega_0)}$$

$$\Rightarrow A + BT = 0, B - jA\omega_0 = K \Rightarrow A = -BT, B + jBT\omega_0 = K, \Rightarrow B(1 + jT\omega_0) = K \Rightarrow$$

$$B = \frac{K}{(1+jT\omega_0)}, A = \frac{-TK}{(1+jT\omega_0)}$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(1+jT\omega_0)}\frac{1}{p-j\omega_0} - \frac{TK}{(1+jT\omega_0)}\frac{1}{Tp+1}\right\} = \frac{K}{(1+jT\omega_0)}e^{-j\omega_0 t} - \frac{K}{(1+jT\omega_0)}e^{-t/T}$$

b) První část výstupního signálu $\frac{K}{(1+jT\omega_0)}e^{-j\omega_0 t}$ představuje harmonické kmitání o stejném kmitočtu jako vstupní signál, ale s jinou amplitudou a fází. Amplituda i fáze jsou dány komplexním číslem $\frac{K}{(1+jT\omega_0)}$

Druhá část výstupního signálu $\frac{K}{(1+jT\omega_0)}e^{-t/T}$ představuje přechodový děj, který časem zanikne.

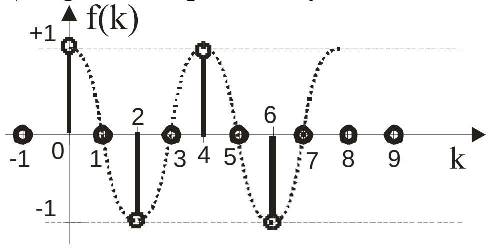
c) Po odeznění přechodových dějů bude amplituda výstupního harmonického signálu dána jako $\left|\frac{K}{(1+jT\omega_0)}\right| = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega_0^2+1}}$. Tuto hodnotu lze získat přímo dosazením za $p = j\omega_0$ do operátorového přenosu $F(p)$ a výpočtem určit absolutní hodnotu.

2007 B/KSAS 3.termín, 1.2.2008	Jméno:	ID=

3. Je dán diskrétní signál $f(k)=\left[\sigma(k)-\sigma(k-N)\right]\cos\frac{4\pi}{N}k, \quad k\in(-\infty,+\infty), N=8$. (**15b**)

a) Načrtněte signál pro $k=-1,0,1,...8,9$ a rozhodněte, zda je periodický. (**5b**)
b) Vypočtěte jeho spektrum. (**5b**)
c) Načrtněte amplitudové spektrum pro $m=-1,0,1,...8,9$. (**5b**)

Řešení
a) Signál není periodický



b) Signál není periodický- použijeme DFT

$$F(m)=\mathscr{D}\left\{f(k)\right\}=\sum_{k=0}^{N-1} f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{k=0}^{N-1} cos\left(\frac{4\pi}{N}k\right)e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{j\frac{4\pi}{N}k}+e^{-j\frac{4\pi}{N}k}\right)e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}e^{j(2-m)\frac{2\pi}{N}k}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j(2+m)\frac{2\pi}{N}k}=\frac{1}{2}\frac{1-e^{j(2-m)\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{j(2-m)\frac{2\pi}{N}}}+\frac{1}{2}\frac{1-e^{-j(2+m)\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{-j(2+m)\frac{2\pi}{N}}}=\frac{1}{2}\frac{1-e^{j(2-m)2\pi}}{1-e^{j(2-m)\frac{2\pi}{N}}}+\frac{1}{2}\frac{1-e^{-j(2+m)2\pi}}{1-e^{-j(2+m)\frac{2\pi}{N}}}$$

První výraz je roven nule $\forall m\neq 2$ neboť čitatel je roven 0 a jmenovatel je různý od nuly. Pro $m=2$ je první výraz zlomek typu 0/0 a proto:

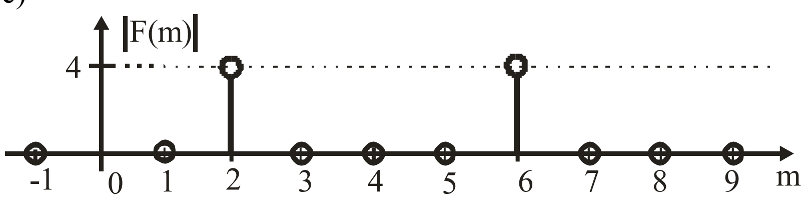
$$\lim_{m\to 2}\frac{1}{2}\frac{1-e^{j(2-m)2\pi}}{1-e^{j(2-m)\frac{2\pi}{N}}}=\frac{1}{2}\lim_{m\to 2}\frac{-j2\pi e^{j(2-m)2\pi}}{-j\frac{2\pi}{N}e^{j(2-m)\frac{2\pi}{N}}}=\frac{N}{2}.$$

Druhý výraz je roven nule $\forall m\neq N-2$ neboť čitatel je roven 0 a jmenovatel je různý od nuly. Pro $m=N-2$ je druhý výraz zlomek typu 0/0 a proto:

$$\lim_{m\to N-2}\frac{1}{2}\frac{1-e^{-j(2+m)2\pi}}{1-e^{-j(2+m)\frac{2\pi}{N}}}=\frac{1}{2}\lim_{m\to N-2}\frac{+j2\pi e^{j(2+m)2\pi}}{+j\frac{2\pi}{N}e^{j(2+m)\frac{2\pi}{N}}}=\frac{N}{2}.$$

Pro spektrum tedy platí: $F(m)=\begin{cases}N/2 & m=2, m=N-2\\ 0 & m\neq 2, m\neq N-2\end{cases}\Rightarrow F(m)=\begin{cases}4 & m=2, m=6\\ 0 & m\neq 2, m\neq 6\end{cases}$

c)



Kontrola:

$$f(k)=\mathscr{D}^{-1}\left\{F(m)\right\}=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}F(m)e^{+jm\frac{2\pi}{N}k}=\frac{1}{N}\left[\frac{N}{2}e^{+j2\frac{2\pi}{N}k}+\frac{N}{2}e^{+j(N-2)\frac{2\pi}{N}k}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{+j\frac{4\pi}{N}k}+e^{-j\frac{4\pi}{N}k}e^{+jN\frac{2\pi}{N}k}\right]=\frac{1}{2}\left[e^{+j\frac{4\pi}{N}k}+e^{-j\frac{4\pi}{N}k}\right]=cos\frac{4\pi}{N}k \quad k=0,1,...N-1$$

4. Diskrétní systém má operátorový přenos $F(z)=\dfrac{K}{z-a}, |a|<1$. Na vstupu systému působí harmonický signál (posloupnost) $u(k)=\sigma(k)e^{+j\omega kT}$ kde ω je jeho kmitočet a T je perioda vzorkování. (**20b**)

a. Určete časový průběh výstupního signálu. (**10b**)
b. Vypočtený časový průběh sestává ze dvou částí. Vysvětlete jejich význam. (**5 b**)
c. Určete amplitudu výstupního harmonického signálu po odeznění přechodových dějů. (**5b**)

Řešení

a) Pro obraz vstupního signálu platí $U(z)=Z\{u(k)\}=Z\{e^{j\omega kT}\}=Z\left\{\left(e^{j\omega T}\right)^k\right\}=\dfrac{z}{z-e^{j\omega T}}$

Pro obraz výstupního signálu platí $Y(z)=Z\{y(k)\}=F(z)U(z)=\dfrac{K}{z-a}\dfrac{z}{z-e^{j\omega T}}$. Rozkladem na parciální zlomky nalezneme:

$$\frac{K}{z-a}\frac{z}{z-e^{j\omega T}}=\frac{A}{z-a}+\frac{B}{z-e^{j\omega T}}=\frac{Az-Ae^{j\omega T}+Bz-Ba}{(z-a)\left(z-e^{j\omega T}\right)}\Rightarrow A+B=K, Ae^{j\omega T}+Ba=0\Rightarrow$$

$$A=K-B,(K-B)e^{j\omega T}+Ba=0\Rightarrow Ke^{j\omega T}=B\left(e^{j\omega T}-a\right)\Rightarrow B=\frac{Ke^{j\omega T}}{e^{j\omega T}-a}, A=K-\frac{Ke^{j\omega T}}{e^{j\omega T}-a}=$$

$$=K\left(1-\frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T}-a}\right)=K\frac{-a}{e^{j\omega T}-a}$$

Tedy

$$Y(z)=\frac{A}{z-a}+\frac{B}{z-e^{j\omega T}}=\frac{Ke^{j\omega T}}{e^{j\omega T}-a}\frac{1}{z-e^{j\omega T}}-K\frac{a}{e^{j\omega T}-a}\frac{1}{z-a}$$

$$y(k)=\frac{Ke^{j\omega T}}{e^{j\omega T}-a}Z^{-1}\left\{\frac{1}{z-e^{j\omega T}}\right\}-K\frac{a}{e^{j\omega T}-a}Z^{-1}\left\{\frac{1}{z-a}\right\}=\frac{Ke^{j\omega T}}{e^{j\omega T}-a}e^{j\omega T(k-1)}-\frac{Ka}{e^{j\omega T}-a}a^{k-1}=$$

$$=\frac{K}{e^{j\omega T}-a}e^{j\omega kT}-\frac{K}{e^{j\omega T}-a}a^k \quad pro \quad k\ge 1 \quad a \quad y(k)=0 \quad pro \quad k<1$$

b) První část výstupního signálu $\dfrac{K}{\left(e^{j\omega T}-a\right)}e^{+j\omega kT}$ představuje harmonicky se měnící posloupnost o stejném kmitočtu jako vstupní signál, ale s jinou amplitudou a fází. Amplituda i fáze jsou dány komplexním číslem $\dfrac{K}{\left(e^{j\omega T}-a\right)}$

Druhá část výstupního signálu $\dfrac{K}{e^{j\omega T}-a}a^k$ představuje přechodový děj, který časem zanikne neboť $|a|<1$.

c) Po odeznění přechodových dějů bude amplituda výstupního harmonického signálu dána jako $\left|\dfrac{K}{\left(e^{j\omega T}-a\right)}\right|$. Tuto hodnotu lze získat přímo dosazením za $z=e^{j\omega T}$ do operátorového přenosu $F(z)$ a vypočítat absolutní hodnotu.