2007 B/K SAS 2.termín 25.1.2008	Jméno:	ID=

1. Signál se spojitým časem $f(t)$ má tvar Diracova impulsu tj. $f(t)=\delta(t)$. (**15b**)

a) Vypočtěte spektrum tohoto signálu. (**10b**)
b) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum signálu $f(t)$ (**5b**).

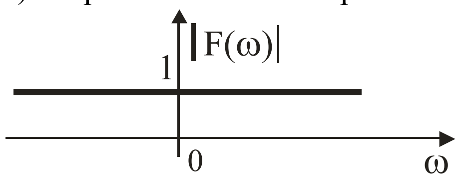
Řešení

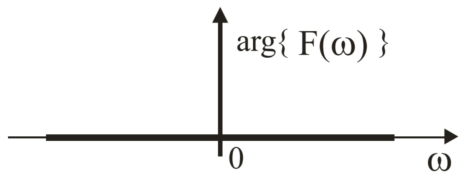
a) Signál $\delta(t)$ nahradíme signálem $\delta(t,\varepsilon)=\begin{cases}1/\varepsilon & t\in(-\varepsilon/2,+\varepsilon/2)\\ 0 & t\notin(-\varepsilon/2,+\varepsilon/2)\end{cases}$, vypočteme jeho spektrum a potom provedeme ve spektru limitní přechod $\varepsilon\to 0$.

$$F(\omega,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t,\varepsilon)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\varepsilon/2}^{+\varepsilon/2}\frac{1}{\varepsilon}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-\varepsilon/2}^{+\varepsilon/2}=\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{e^{-j\omega\varepsilon/2}-e^{+j\omega\varepsilon/2}}{-j\omega}=\frac{e^{+j\omega\varepsilon/2}-e^{-j\omega\varepsilon/2}}{-j\omega\varepsilon}=\frac{\sin\frac{\omega\varepsilon}{2}}{\frac{\omega\varepsilon}{2}}$$

$$F(\omega)=\lim_{\varepsilon\to 0}F(\omega,\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{sin\frac{\omega\varepsilon}{2}}{\frac{\omega\varepsilon}{2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{\omega}{2}cos\frac{\omega\varepsilon}{2}}{\frac{\omega}{2}}=1$$

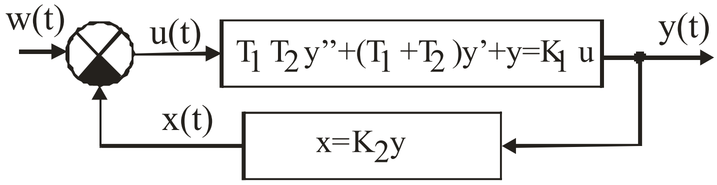
b) Amplitudové a fázové spektrum signálu





2007 B/K SAS 2.termín 25.1.2008	Jméno:	ID=

2. Je dáno zpětnovazební zapojení dvou spojitých lineárních systémů (**20 b**):



a) Určete operátorový přenos výsledného spojení obou systémů (**5b**)
b) Určete velikost konstanty K_2 tak, aby celý systém byl na mezi aperiodicity (**5b**)
c) Vypočtěte ustálenou hodnotu přechodové charakteristiky celého spojení . (**5b**)
d) Načrtněte přechodovou charakteristiku celého spojení pro K_2 vypočtené v bodě b). (**5 b**)

Řešení

a) Pro jednotlivé operátorové přenosy platí: $F_1(p)=\dfrac{K_1}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$, $F_2(p)=K_2$. Pro výsledný přenos bude platit:

$$F(p)=\frac{\dfrac{K_1}{(T_1p+1)(T_2p+1)}}{1+\dfrac{K_1K_2}{(T_1p+1)(T_2p+1)}}=\frac{K_1}{(T_1p+1)(T_2p+1)+K_1K_2}=\frac{K_1}{T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+1+K_1K_2}=$$

$$=\frac{K_1}{K_1K_2+1}\frac{1}{\dfrac{T_1T_2}{1+K_1K_2}p^2+\dfrac{(T_1+T_2)}{1+K_1K_2}p+1}$$

Jedná se o statický systém 2. řádu s operátorovým přenosem $F(p)=\dfrac{K}{T^2p^2+2\xi Tp+1}$ a srovnáním obdržíme:

$$K=\frac{K_1}{K_1K_2+1}\quad T=\sqrt{\frac{T_1T_2}{1+K_1K_2}}\quad 2\xi T=\frac{(T_1+T_2)}{1+K_1K_2}\quad\Rightarrow\quad \xi=\frac{1}{2T}\frac{(T_1+T_2)}{1+K_1K_2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+K_1K_2}{T_1T_2}}\frac{(T_1+T_2)}{1+K_1K_2}$$

b) Aby byl systém na mezi aperiodicity musí být $\xi=1$. Tedy

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+K_1K_2}{T_1T_2}}\frac{(T_1+T_2)}{1+K_1K_2}=1\quad\Rightarrow\quad (T_1+T_2)\sqrt{1+K_1K_2}=2\sqrt{T_1T_2}(1+K_1K_2)\quad\Rightarrow$$

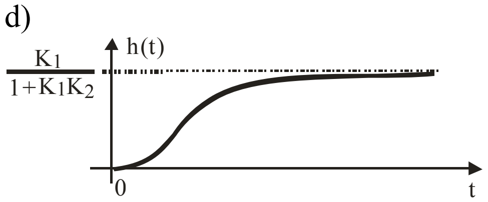
$$\Rightarrow\quad (T_1+T_2)^2(1+K_1K_2)=4T_1T_2(1+K_1K_2)^2\quad\Rightarrow\quad (T_1+T_2)^2=4T_1T_2(1+K_1K_2)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 1+K_1K_2=\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2}\quad\Rightarrow\quad K_1K_2=\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2}-1\quad\Rightarrow K_2=\frac{1}{K_1}\left[\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2}-1\right]=$$

$$=\frac{1}{K_1}\frac{T_1^2+2T_1T_2+T_2^2-4T_1T_2}{4T_1T_2}=\frac{1}{K_1}\frac{(T_1-T_2)^2}{4T_1T_2}$$

c) Ustálená hodnota přechodové charakteristiky je rovna zesílení celého systému tj. $K_1/(1+K_1K_2)$.

d)



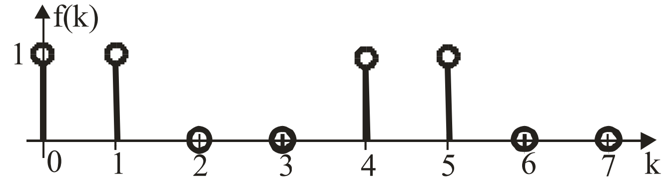
2007 B/K SAS 2.termín 25.1.2008	Jméno:	ID=

3. Pro všechna celá čísla $i \in (-\infty,+\infty)$ je dán diskrétní signál $f(k)=\begin{cases}1 & k=4i\\ 1 & k=4i+1\\ 0 & k=4i+2\\ 0 & k=4i+3\end{cases}$ (**15b**)

a) Načrtněnte signál pro $i=0$ a $i=1$ a rozhodněte, zda je periodický. (**3b**)
b) Vypočtěte spektrum signálu. (**4b**)
c) Načrtněte amplitudové spektrum pro $m=0,1,...7$. Ocejchujte osy.(**4b**)
d) Načrtněte fázové spektrum pro $m=0,1,...7$. Ocejchujte osy.(**4b**)

Řešení:

a)



Signál je periodický s periodou $N=4$.

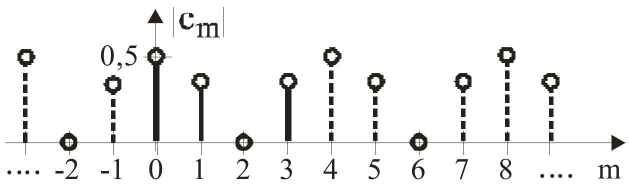
b) $c_0=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j0\frac{2\pi}{4}k}=\frac{1}{4}(1.1+1.1+0.1+0.1)=0,5e^{j0^\circ}$

$$c_1=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j1\frac{2\pi}{4}k}=\frac{1}{4}\left(1.1+1.e^{-j\frac{\pi}{2}1}+0.e^{-j\frac{\pi}{2}2}+0.e^{-j\frac{\pi}{2}3}\right)=\frac{1-j}{4}=0,35e^{-j45^\circ}$$

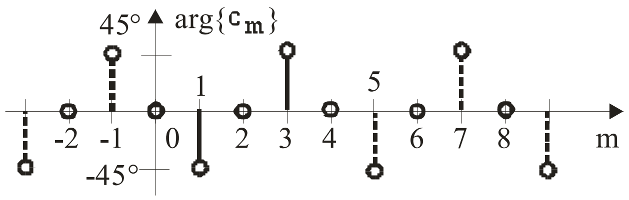
$$c_2=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j2\frac{2\pi}{4}k}=\frac{1}{4}\left(1.1+1.e^{-j2\frac{\pi}{2}1}+0.e^{-j2\frac{\pi}{2}2}+0.e^{-j2\frac{\pi}{2}3}\right)=\frac{1-1}{4}=0$$

$$c_3=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j3\frac{2\pi}{4}k}=\frac{1}{4}\left(1.1+1.e^{-j3\frac{\pi}{2}1}+0.e^{-j3\frac{\pi}{2}2}+0.e^{-j3\frac{\pi}{2}3}\right)=\frac{1+j}{4}=0,35e^{+j45^\circ}$$

c) $|c_0|=0,5 \quad |c_1|=0,35 \quad |c_2|=0 \quad |c_3|=0,35$



d) $\arg\{c_0\}=0 \quad \arg\{c_1\}=-45^\circ \quad \arg\{c_2\}=0 \quad \arg\{c_3\}=+45^\circ$



2007 B/K SAS 2.termín 25.1.2008	Jméno:	ID=

4. Spojitý lineární systém má jeden pól $p_1 = -2$ a jednu nulu $n_1 = 0$ a koeficient u nejvyšší mocniny čitatele přenosu je 20. Vypočtěte ekvivalentní *Z* přenos tohoto systému a tomu odpovídající diferenční rovnici diskretizovaného spojitého systému. Periodu vzorkování označte *T*. (**20b**)

Řešení

a) Pro operátorový přenos systému platí $F(p) = \dfrac{20p}{p+2}$ (**5b**)

b) Pro přechodovou charakteristiku platí: $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p}F(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p}\dfrac{20p}{p+2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{20}{p+2}\right\} = 20e^{-2t}$

(**5b**)

c) Vzorkováním ($t = kT, k \in (0, +\infty)$) přechodové charakteristiky obdržíme posloupnost: $h(k) = 20e^{-2kT}$

Z obraz této posloupnosti bude: $Z\{h(k)\} = Z\{20e^{-2kT}\} = 20\dfrac{z}{z - e^{-2T}}$ (**5b**)

d) Pro ekvivalentní přenos platí:

$$F_e(z) = \left(1 - z^{-1}\right) Z\{h(k)\} = \frac{z-1}{z}\frac{20z}{z - e^{-2T}} = 20\frac{z-1}{z - e^{-2T}} = 20\frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1}e^{-2T}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$ a odpovídající

diferenční rovnice bude

$$Y(z)\left(1 - z^{-1}e^{-2T}\right) = 20U(z)\left(1 - z^{-1}\right) \quad \Rightarrow \quad y(k) - e^{-2T}y(k-1) = 20\left[u(k) - u(k-1)\right]$$ (**5b**)