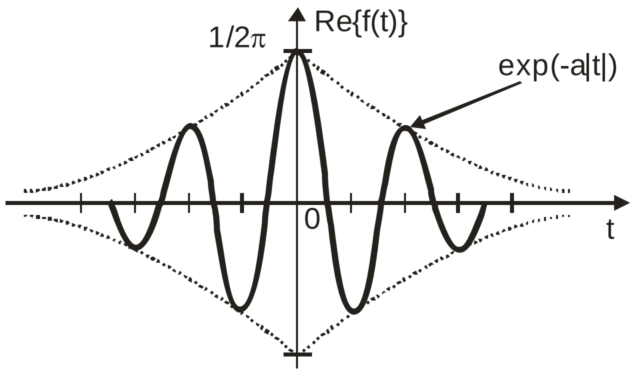
2006 Písemka 3, 1.2.2007	Jméno	ID

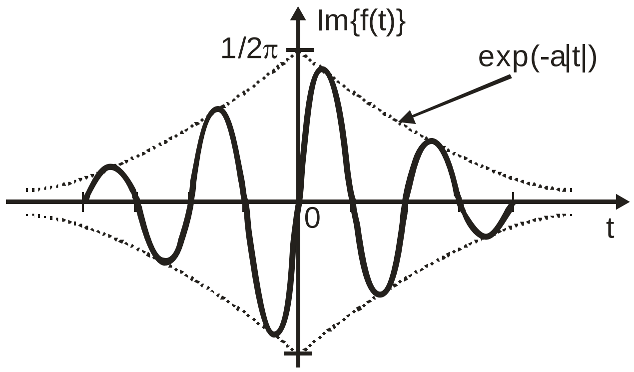
1. Je dán spojitý signál $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-a|t|}e^{j\omega_0 t} \quad t\in(-\infty,+\infty), a>0$ **(12b)**

a) Načrtněte reálnou a imaginární část signálu a rozhodněte, zda je periodický **(4b)**
b) Vypočtěte jeho spektrum (**4b**)
c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum (**4b**)

Řešení:

a) Platí $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-a|t|}\cos\omega_0 t+j\dfrac{1}{2\pi}e^{-a|t|}\sin\omega_0 t$. Reálná (imaginární) část signálu představuje tlumený kosinusový (sinusový) signál. Signál není periodický.





b) Pro spektrum platí

$F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|t|}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt$. Protože $e^{-a|t|}=\begin{cases}e^{-at} & t\ge 0\\ e^{+at} & t<0\end{cases}$ je třeba integrál rozdělit na dva integrály. Bude

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_{-\infty}^{0}e^{+at}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt+\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-at}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_{-\infty}^{0}e^{+t(a+j\omega_0-j\omega)}dt+\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-t(a-j\omega_0+j\omega)}dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{(a+j\omega_0-j\omega)}\left[e^{+t(a+j\omega_0-j\omega)}\right]_{-\infty}^{0}+\frac{-1}{(a-j\omega_0+j\omega)}\left[e^{-t(a-j\omega_0+j\omega)}\right]_{0}^{+\infty}\right\}=$$

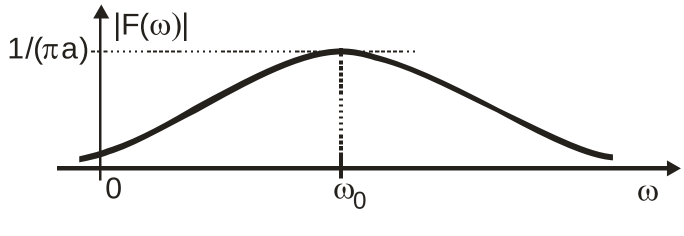
$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{(a+j\omega_0-j\omega)}+\frac{1}{(a-j\omega_0+j\omega)}\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{a-j(\omega-\omega_0)}+\frac{1}{a+j(\omega-\omega_0)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{a+j\omega-j\omega_0+a-j\omega+j\omega_0}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}=\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}$$

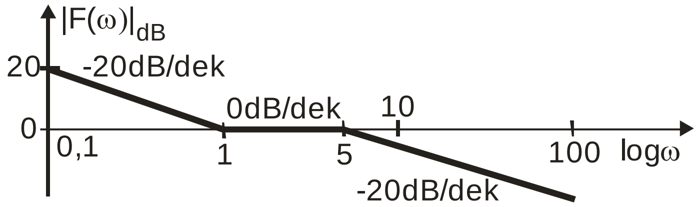
c) Spektrum je čistě reálné a kladné, proto $|F(\omega)|=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}$, $\arg\{F(\omega)\}=0$. Dále platí

$F(-\infty)=F(+\infty)=0$ a pro extrém spektra bude $\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{-a\left[2(\omega-\omega_0)\right]}{\left[a^2+(\omega-\omega_0)^2\right]^2}\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad \omega=\omega_0$

$F(\omega=\omega_0)=\dfrac{1}{\pi a}$



2. Spojitý systém, který nemá dopravní zpoždění, má asymptotickou amplitudovou frekvenční charakteristiku uvedenou na obrázku. **(15b)**



a) Určete operátorový přenos systému (**4b**)
b) Napište diferenciální rovnici systému (**2b**)
c) Načrtněte rozložení pólů a nul tohoto systému. Popište osy. (**3b**)
d) Načrtněte fázovou charakteristiku tohoto systému (**6b**)

Řešení:

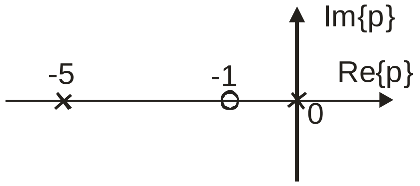
a) Operátorový přeno je typu $F\left(p\right)=\dfrac{K\left(T_1 p+1\right)}{p\left(T_2 p+1\right)}$ kde pro konstantu K platí

$20\log\left.\dfrac{K}{\omega}\right|_{\omega=1}=20\log K=0dB \quad\Rightarrow\quad K=1$ a dále platí

$$\frac{1}{T_1}=1\Rightarrow T_1=1,\quad \frac{1}{T_2}=5\Rightarrow T_2=0,2 \quad\Rightarrow\quad F\left(p\right)=\frac{\left(p+1\right)}{p\left(0,2p+1\right)}$$

b) $F\left(p\right)=\dfrac{Y\left(p\right)}{U\left(p\right)}=\dfrac{\left(p+1\right)}{p\left(0,2p+1\right)}\Rightarrow Y\left(p\right)\left(0,2p^2+p\right)=U\left(p\right)\left(p+1\right)\Rightarrow 0,2y''\left(t\right)+y'\left(t\right)=u'\left(t\right)+u\left(t\right)$

c) Systém má dva póly $p_1=0; p_2=-1/0,2=-5$ a jednu nulu $n_1=-1$

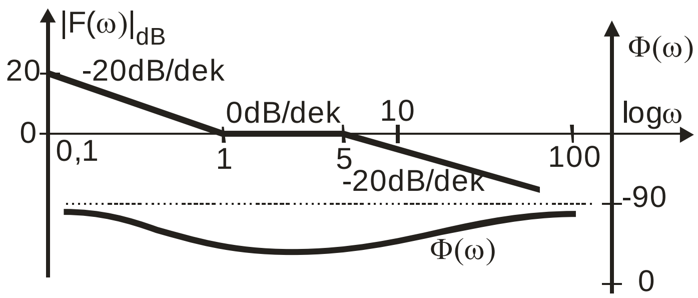


d) Pro fázovou charakteristiku platí $\Phi\left(\omega\right)=-\dfrac{\pi}{2}+arctg\omega-arctg0,2\omega$. Platí

$$\Phi\left(0\right)=-\frac{\pi}{2}+0-0=-\frac{\pi}{2},\quad \Phi\left(\infty\right)=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$ a pro extrém platí

$$\frac{d\Phi\left(\omega\right)}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}\left(-\frac{\pi}{2}+arctg\omega-arctg0,2\omega\right)=\frac{1}{1+\omega^2}-\frac{0,2}{1+0,04\omega^2}=\frac{1+0,04\omega^2-0,2-0,2\omega^2}{\left(1+\omega^2\right)\left(1+0,04\omega^2\right)}\Rightarrow$$

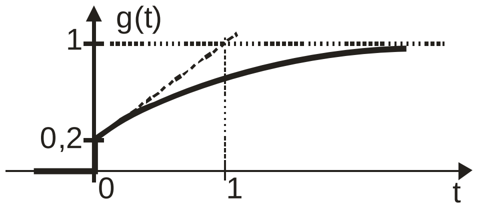
$$0,8-0,16\omega^2=0 \quad\Rightarrow\quad \omega=\sqrt{\frac{0,8}{0,16}}=\sqrt{5}\doteq 2,2$$



3. Spojitý systém má impulsní charakteristiku $g\left(t\right)=\begin{cases}1-0,8e^{-t} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ (**15b**)

a) Načrtněte impulsní charakteristiku. Popište a ocejchujte osy (**4b**)
b) Určete operátorový přenos systému. (**4b**)
c) Rozhodněte o stabilitě systému. (**2b**)
d) Na vstupu tohoto systému působí harmonický signál $u\left(t\right)=Ae^{j\omega_0 t}$ s parametry $A=1,\omega_0=1$. Určete amplitudu výstupního harmonického signálu po odeznění přechodových dějů. (**5b**)

Řešení:
a) Platí $g\left(0\right)=1-0,8=0,2;\quad g\left(\infty\right)=1;\quad g'\left(t\right)=0,8e^{-t}\quad\Rightarrow\quad g'\left(0\right)=0,8$.



b) $F\left(p\right)=\mathcal{L}\left\{g\left(t\right)\right\}=\mathcal{L}\left\{1-0,8e^{-t}\right\}=\frac{1}{p}-\frac{0,8}{p+1}=\frac{p+1-0,8p}{p\left(p+1\right)}=\frac{0,2p+1}{p\left(p+1\right)}$

c) Systém má jeden pól v levé polorovině a druhý v 0. Je tedy na mezi stability.
d) Amplituda výstupního harmonického signálu po odeznění přechodových dějů je rovna absolutní hodnotě frekvenčního přenosu pro kmitočet $\omega=\omega_0=1$. Proto

$$\left|F\left(\omega\right)\right|=\left|\frac{0,2j\omega+1}{j\omega\left(j\omega+1\right)}\right|=\frac{\sqrt{0,04\omega^2+1}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}\quad\Rightarrow\quad\left|F\left(\omega=1\right)\right|=\frac{\sqrt{0,04+1}}{1\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{1,04}}{\sqrt{2}}=\sqrt{0,502}\doteq 0,71$$

4. Je dán spojitý periodický signál $f(t) = A\cos\omega_0 t$ s parametry $A = 2, \omega_0 = 1$, který je třeba vzorkovat. (**12b**)

a) Určete minimální vzorkovací kmitočet. Zvolte vzorkovací kmitočet jako šestinásobek minimálního vzorkovacího kmitočtu a určete počet vzorků v jedné periodě spojitého signálu.(**4b**)

b) Napište výraz pro vzorkovaný signál. Načrtněte jednu periodu vzorkovaného signálu. Popište a ocejchujte osy. (**4b**)

c) Pro spektrum takto vzorkovaného signálu platí

$$c_m = \frac{A}{2N}\left\{\frac{1-e^{-j2\pi(m-1)}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-1)}} + \frac{1-e^{-j2\pi(m+1)}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+1)}}\right\}$$ kde N je počet vzorků v jedné periodě spojitého signálu.

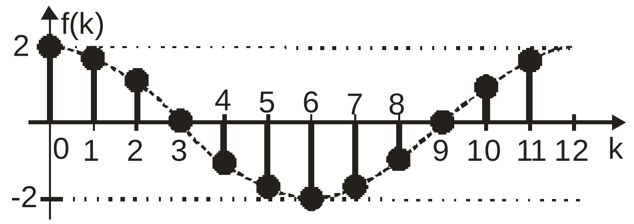
Vypočtěte a načrtněte amplitudové spektrum vzorkovaného signálu pro $m = 0,1,...N$. (**4b**)

Řešení:

a) Jelikož nejvyšší kmitočet ve spektru spojitého signálu je $\omega_0 = 1$ je minimální vzorkovací kmitočet $\omega_{s\min} = 2\omega_0 = 2rad/\sec$. Pro vzorkovací kmitočet pak podle zadání platí $\omega_s = 6\omega_{s\min} = 12rad/\sec$. Perioda spojitého signálu je $P = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$, perioda vzorkovacího kmitočtu je $T_s = 2\pi/\omega_s = 2\pi/12 = \pi/6$. Pro počet vzorků v jedné periodě spojitého signálu platí

$$N = \frac{P}{T_s} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12.$$

b) Platí $f(k) = A\cos\frac{2\pi}{12}k = A\cos\frac{\pi}{6}k \quad k \in (-\infty, +\infty)$.

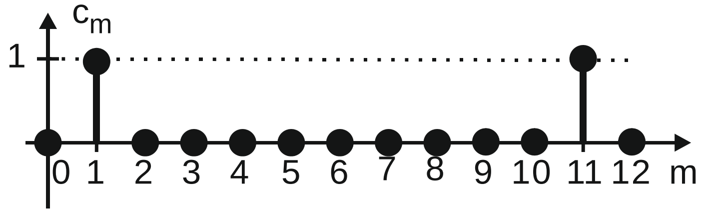


c) Pro $m \neq 1$ a $m \neq N-1$ jsou všechny koeficienty spektra c_m nulové (čitatelé obou zlomků jsou rovny 0, jmenovatelé jsou různé od 0). Pro $m = 1$ je druhý zlomek ve výrazu roven 0 a první zlomek je neurčitý výraz typu 0/0. Proto

$$c_1 = \lim_{m\to 1}\frac{A}{2N}\frac{1-e^{-j2\pi(m-1)}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-1)}} = \frac{A}{2N}\lim_{m\to 1}\frac{j2\pi e^{-j2\pi(m-1)}}{j\frac{2\pi}{N}e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-1)}} = \frac{A}{2N}\frac{j2\pi}{j\frac{2\pi}{N}} = \frac{A}{2N}N = \frac{A}{2} = 1$$

Podobně pro $m = N-1$ je první zlomek ve výrazu roven 0 a druhý zlomek je neurčitý výraz typu 0/0. Proto

$$c_{N-1} = \lim_{m\to N-1}\frac{A}{2N}\frac{1-e^{-j2\pi(m+1)}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(m)}} = \frac{A}{2N}\lim_{m\to N-1}\frac{j2\pi e^{-j2\pi(m+1)}}{j\frac{2\pi}{N}e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+1)}} = \frac{A}{2N}\frac{j2\pi}{j\frac{2\pi}{N}} = \frac{A}{2N}N = \frac{A}{2} = 1$$



5. Diskrétní systém je popsán diferenční rovnicí $y(k)+y(k-1)=u(k-1)-u(k-2)$. **(16b)**

a) Určete operátorový přenos systému (**4b**)

b) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy (**2b**). Rozhodněte o stabilitě systému. (**2b**)

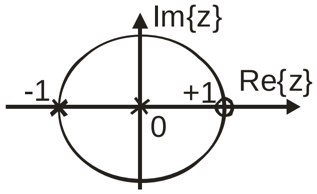
c) Vypočtěte impulsní charakteristiku systému (**4b**) a načrtněte ji pro k=0,1,2,3,4,5 . Popište osy a ocejchujte je. (**4b**)

Řešení:

a) Platí

$$Y(z)+z^{-1}Y(z)=z^{-1}U(z)-z^{-2}U(z) \quad \Rightarrow Y(z)\left(1+z^{-1}\right)=U(z)\left(z^{-1}-z^{-2}\right) \quad \Rightarrow F(z)=\frac{z^{-1}-z^{-2}}{1+z^{-1}}=\frac{z-1}{z(z+1)}$$

b) Systém má dva póly $z_1=0, z_2=-1$ a jednu nulu $n_1=1$. Systém je na mezi stability neboť jeden pól leží na jednotkové kružnici.



c) Impulsní charakteristika -první možnost řešení:

$$g(k)=\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-1}-z^{2}}{1+z^{-1}}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}-\frac{z^{-2}}{1+z^{-1}}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}\right\}-\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-2}}{1+z^{-1}}\right\}=g_1(k)-g_2(k)$$

$$g_1(k)=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-1}\frac{1}{1+z^{-1}}\right\}=\begin{cases}(-1)^{k-1} & k\geq 1\\ 0 & k<1\end{cases}$$

$$g_2(k)=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-2}}{1+z^{-1}}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-2}\frac{1}{1+z^{-1}}\right\}=\begin{cases}(-1)^{k-2} & k\geq 2\\ 0 & k<2\end{cases} \quad \Rightarrow \quad g(k)=\begin{cases}0 & k=0\\ (-1)^{k-1} & k=1\\ (-1)^{k-1}-(-1)^{k-2} & k\geq 2\end{cases}$$

$$k=0 \quad g(0)=0$$

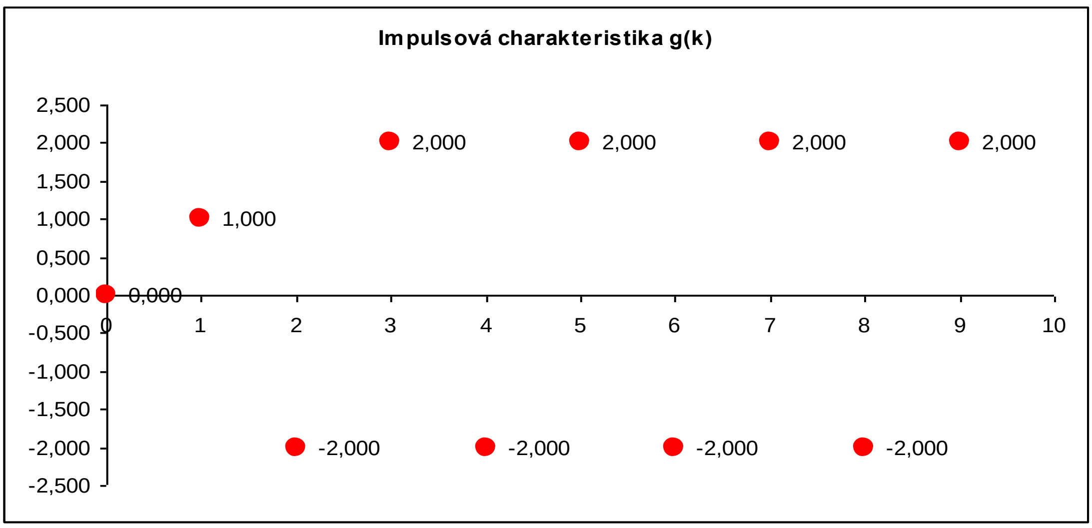
$$k=1 \quad g(1)=(-1)^{1-1}=(-1)^{0}=+1$$

$$k=2 \quad g(2)=(-1)^{2-1}-(-1)^{2-2}=(-1)^{1}-(-1)^{0}=-1-1=-2$$

$$k=3 \quad g(3)=(-1)^{3-1}-(-1)^{3-2}=(-1)^{2}-(-1)^{1}=+1+1=+2$$

$$k=4 \quad g(4)=(-1)^{4-1}-(-1)^{4-2}=(-1)^{3}-(-1)^{2}=-1-1=-2$$

$$k=5 \quad g(5)=(-1)^{5-1}-(-1)^{5-2}=(-1)^{4}-(-1)^{3}=+1+1=+2$$



Impulsní charakteristika-druhá možnost řešení= dělení polynomu polynomem

čitatel			jmenovatel			podíl					
z^2	z^1	z^0	z^2	z^1	z^0	z^0	z^(-1)	z(-2)	z^(-3)	z^(-4)	z^(-5)
0	1	-1	1	1	0	0,000	1,000	-2,000	2,000	-2,000	2,000

0	0	0									
0	1	-1									
	1	1	0								
	0	-2	0								
		-2	-2	0							
		0	2	0	0						
			2	2	0						
			0	-2	0						
				-2	-2	0					
				0	2	0					
					2	2	0				
					0	-2	0				
						-2	-2	0			
						0	2	0			
							2	2	0		
							0	-2	0		
								-2	-2	0	
								0	2	0	
									2	2	0
									0	-2	0

Třetí možnost řešení:

$$F(z)=\frac{z-1}{z(z+1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}=\frac{Az+A+Bz}{z(z+1)}\Rightarrow \begin{matrix}A=-1\\B=+2\end{matrix}\Rightarrow F(z)=\frac{-1}{z}+\frac{2}{z+1}=-z^{-1}+\frac{2z^{-1}}{1+z^{-1}}\Rightarrow$$

$$g(k)=-\delta(k-1)+2(-1)^{k-1}\quad pro\quad k\geq 1,\quad g(k)=0\quad pro\quad k<1$$

$$g\;\;k\;=\begin{cases}0 & k<1\\ 1 & k=1\\ 2\;-1^{\;k-1} & k>1\end{cases}$$