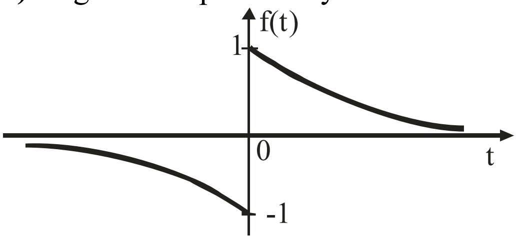
BSAS- termín 2, 25.1.2007	Jméno	ID

1. Je dán spojitý signál $f\left(t\right)=\begin{cases} e^{-at} & t\geq 0 \\ -e^{at} & t<0 \end{cases},\quad t\in\left(-\infty,+\infty\right), a>0$. **(10b)**

a) Rozhodněte, zda je signál periodický. V případě že ano, určete jeho základní periodu a základní kmitočet. Načrtněte tento signál (**2b**)
b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu. (**3b**)
c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum signálu. Popište a ocejchujte osy. (**3b**)
d) V případě, že tento signál je periodický určete jeho výkon, v případě že není periodický určete jeho energii. (**2b**)

Řešení:

a) Signál není periodický.



b) Pro jeho spektrum platí

$$F\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-j\omega t}dt=-\int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt=-\int_{-\infty}^{0} e^{t\left(a-j\omega\right)}dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-t\left(a+j\omega\right)}dt=$$

$$=\frac{-1}{a-j\omega}\left[e^{t\left(a-j\omega\right)}\right]_{-\infty}^{0}+\frac{-1}{a+j\omega}\left[e^{-t\left(a+j\omega\right)}\right]_{0}^{+\infty}=\frac{-1}{a-j\omega}+\frac{+1}{a+j\omega}=\frac{-a-j\omega+a-j\omega}{a^2+\omega^2}=\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}$$

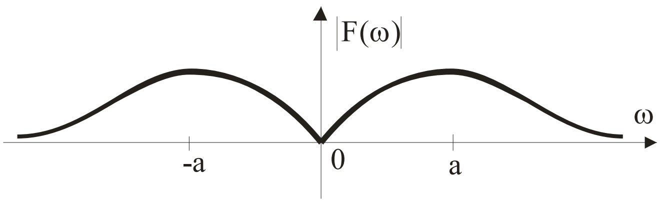
c) Pro amplitudové spektrum platí

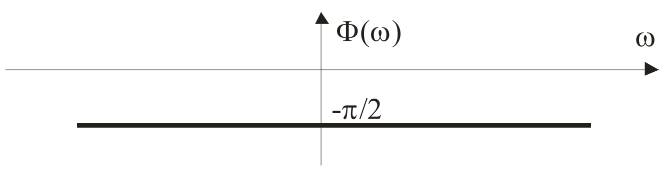
$$\left|F\left(\omega\right)\right|=\left|\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}\right|=\frac{2\left|\omega\right|}{a^2+\omega^2},\quad F\left(0\right)=0,\quad F\left(-\infty\right)=0,\quad F\left(+\infty\right)=0$$

Amplitudové spektrum je sudou funkcí w a pro wł 0 platí pro extrémy

$$\left|F\left(\omega\right)\right|=\frac{2\omega}{a^2+\omega^2},\quad \frac{d\left|F\left(\omega\right)\right|}{d\omega}=2\frac{a^2+\omega^2-\omega 2\omega}{\left(a^2+\omega^2\right)^2}=2\frac{a^2-\omega^2}{\left(a^2+\omega^2\right)^2}\overset{!}{=}0\Rightarrow a^2=\omega^2\Rightarrow\omega=\pm a$$

Pro fázové spektrum platí $\arg\left\{F\left(\omega\right)\right\}=\arg\left\{\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}\right\}=\arg\left\{-j\right\}=-\frac{\pi}{2}$





d) Signál není periodický a pro jeho energii platí

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f\left(t\right)\right|^2 dt=2\int_{0}^{+\infty}\left(e^{-at}\right)^2 dt=2\int_{0}^{+\infty} e^{-2at}dt=\frac{2}{-2a}\left[e^{-2at}\right]_{0}^{+\infty}=\frac{1}{-a}\left[0-1\right]=\frac{1}{a}$$

2. Laplaceův obraz přechodové charakteristiky spojitého systému je $H(p)=\dfrac{10}{(10p+1)(p+1)}$ (**16b**)

a) Vypočtěte přechodovou charakteristiku $h(t)$ a načrtněte ji (**4b**). Popište a ocejchujte osy. (**2b**)

b) Vypočtěte impulsovou charakteristiku $g(t)$ (**4b**) a načrtněte ji. Popište a ocejchujte osy (**2b**)

c) Vypočtěte operátorový přenos systému (**2b**)

d) Určete diferenciální rovnici systému. (**2b**)

Pomůcka: $\dfrac{20}{9}\ln 10 \doteq 5$

Řešení:

a) Pro přechodovou charakteristiku platí $h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(p)\}$. Rozkladem na parciální zlomky obdržíme:

$$H(p)=\frac{10}{(10p+1)(p+1)}=\frac{A}{(10p+1)}+\frac{B}{(p+1)}=\frac{Ap+A+10Bp+B}{(10p+1)(p+1)}\Rightarrow \begin{matrix}A+B=10\\ A+10B=0\end{matrix}\Rightarrow \begin{matrix}A=10-B\\ 10-B+10B=0\end{matrix}\Rightarrow$$

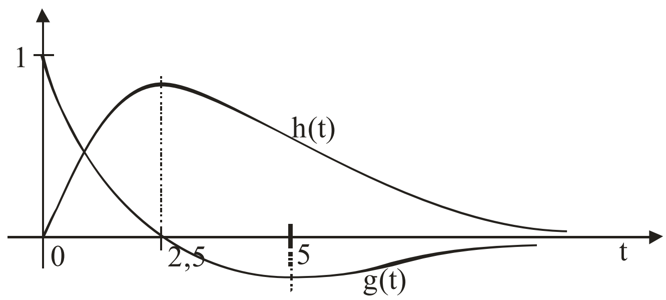
$$\Rightarrow \quad A=100/9,\quad B=-10/9$$

$$H(p)=\frac{100/9}{(10p+1)}-\frac{10/9}{(p+1)}=\frac{10/9}{(p+1/10)}-\frac{10/9}{(p+1)}\Rightarrow h(t)=\frac{10}{9}\left(e^{-\frac{t}{10}}-e^{-t}\right)$$

Platí $h(0)=0, h(\infty)=0$ a pro extrém platí

$$\frac{dh(t)}{dt}=\frac{10}{9}\frac{d}{dt}\left(e^{-t/10}-e^{-t}\right)=\frac{10}{9}\left(-\frac{1}{10}e^{-t/10}+e^{-t}\right)=0\Rightarrow \frac{1}{10}e^{-t/10}=e^{-t}\Rightarrow e^{t(1-1/10)}=10\Rightarrow t=\frac{10}{9}\ln 10\doteq 2{,}5$$

Pro hodnotu derivace v bodě $t=0$ platí $\left.\dfrac{dh(t)}{dt}\right|_{t=0}=\dfrac{10}{9}\left(-\dfrac{1}{10}+1\right)=1$



b) Pro impulsovou charakteristiku platí (viz bod a)

$$g(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\frac{10}{9}\frac{d}{dt}\left(e^{-t/10}-e^{-t}\right)=\frac{10}{9}\left(-\frac{1}{10}e^{-t/10}+e^{-t}\right)$$

Extrém:

$$g'(t)=\frac{dg(t)}{dt}=\frac{10}{9}\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{10}e^{-t/10}+e^{-t}\right)=\frac{10}{9}\left(\frac{1}{100}e^{-t/10}-e^{-t}\right)=0\Rightarrow \frac{1}{100}e^{-t/10}=e^{-t}\Rightarrow e^{t(1-1/10)}=100\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{10}{9}\ln 100=\frac{10}{9}\ln 10^2=\frac{10}{9}2\ln 10=\frac{20}{9}\ln 10\doteq 5$$

Pro hodnotu derivace v bodě $t=0$ platí $g'(t=0)=\dfrac{10}{9}\left(\dfrac{1}{100}-1\right)=-\dfrac{10}{9}\dfrac{99}{100}=-\dfrac{11}{10}=-1{,}1$

Dále platí $g(0)=0,\ g(\infty)=0,\ g'(\infty)=0$

c) Platí

$$F(p)=pH(p)=\frac{10p}{(10p+1)(p+1)}=\frac{10p}{10p^2+11p+1}$$

c) Platí

$$Y(p)\left(10p^2+11p+1\right)=10pU(p)\quad\Rightarrow\quad 10y''(t)+11y'(t)+y(t)=10u'(t)$$

3. Spojitý systém se vstupem $u(t)$ a výstupem $y(t)$ je popsán diferenciální rovnicí

$10y''(t)+11y'(t)+y(t)=10u'(t)$ **(16b)**

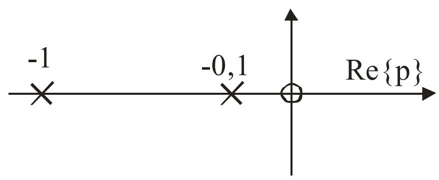
a) Určete operátorový přenos systému (**2b**)
b) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. (**4b**)
c) Rozhodněte o stabilitě systému, zdůvodněte rozhodnutí (**2b**)
d) Načrtněte amplitudovou (**4b**) a fázovou (**4b**) frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Popište a ocejchujte osy

Řešení:

a) Platí $10p^2Y(p)+11pY(p)+Y(p)=10pU(p) \quad \Rightarrow \quad F(p)=\dfrac{10p}{10p^2+11p+1}$

b) Charakteristická rovnice

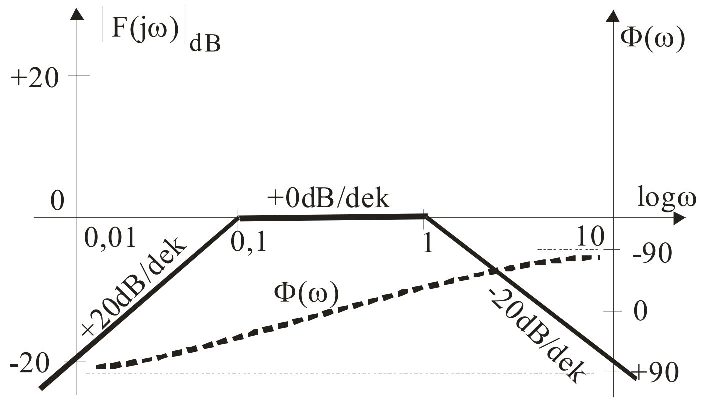
$10p^2+11p+1=0 \Rightarrow p_{1,2}=\dfrac{-11\pm\sqrt{121-40}}{20}=\begin{cases}-1\\-0{,}1\end{cases}$. Systém má dva póly a jednu nulu.



c) Oba póly leží v levé polorovině komplexní roviny, a proto je systém stabilní.
d) Platí

$$F(p)=\frac{10p}{10p^2+11p+1}=\frac{10p}{10(p+1/10)(p+1)}=\frac{10p}{(10p+1)(p+1)}$$

$$F(j\omega)=\frac{10j\omega}{(10j\omega+1)(j\omega+1)}\Rightarrow\left|F(j\omega)\right|=\frac{10\omega}{\sqrt{100\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+1}},\ \Phi(\omega)=\frac{\pi}{2}-arctg10\omega-arctg\omega$$



4. Je dán diskrétní periodický signál s periodou $N=4$ pro jehož hodnoty platí $f(0)=f(2)=2$ a $f(1)=f(3)=0$. **12b**

a) Vypočtěte jeho spektrum. (**4b**)
b) Načrtněte amplitudové spektrum. Ocejchujte osy.(**4b**)
c) Načrtněte fázové spektrum. Ocejchujte osy.(**4b**)

Řešení:

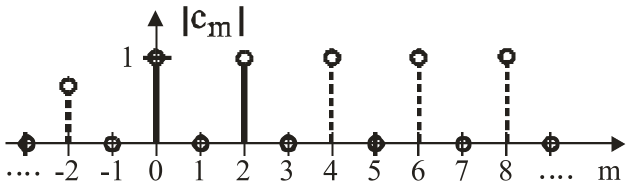
a) $c_0=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j0\frac{2\pi}{4}k}=\frac{1}{4}(2\times1+0\times1+2\times1+0\times1)=1$

$$c_1=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j1\frac{2\pi}{4}k}=\frac{1}{4}\left(2\times1+0\times e^{-j\frac{\pi}{2}1}+2\times e^{-j\frac{\pi}{2}2}+0\times e^{-j\frac{\pi}{2}3}\right)=\frac{2-2}{4}=0$$

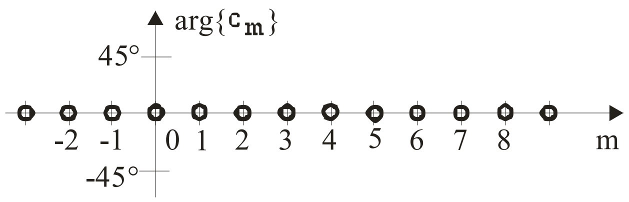
$$c_2=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j2\frac{2\pi}{4}k}=\frac{1}{4}\left(2\times1+0\times e^{-j2\frac{\pi}{2}1}+2\times e^{-j2\frac{\pi}{2}2}+0.e^{-j2\frac{\pi}{2}3}\right)=\frac{2+2}{4}=1$$

$$c_3=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k)e^{-j3\frac{2\pi}{4}k}=\frac{1}{4}\left(2\times1+0\times e^{-j3\frac{\pi}{2}1}+2\times e^{-j3\frac{\pi}{2}2}+0\times e^{-j3\frac{\pi}{2}3}\right)=\frac{2-2}{4}=0$$

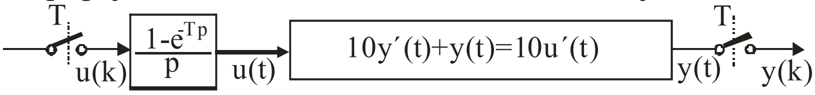
b) $|c_0|=1\quad |c_1|=0\quad |c_2|=1\quad |c_3|=0$



c) $\arg\{c_0\}=0\quad \arg\{c_1\}=0\quad \arg\{c_2\}=0\quad \arg\{c_3\}=0$



5. Spojitý systém je popsán diferenciální rovnici $10y'(t) + y(t) = 10u'(t)$. Na vstupu tohoto systému je připojen tvarovač 0. řádu. Perioda vzorkování je $T = 1\text{sec}$.



(**16b**)

a) Vypočtěte operátorový přenos spojitého systému (**2b**)
b) Vypočtěte přechodovou charakteristiku spojitého systému (**3b**)
c) Vzorkujte přechodovou charakteristiku s periodou *T*. (**3b**)
d) Určete ekvivalentní Z přenos diskretizovaného systému (**5b**)
e) Vypočtěte přechodovou charakteristiku diskretizovaného systému pro $k = 0,1,2,3,4$. (**3b**)

Řešení:

a) Platí

$$10pY(p) + Y(p) = 10pU(p) \quad \Rightarrow \quad F(p) = \frac{10p}{10p+1}$$

b) Platí

$$H(p) = \frac{1}{p}F(p) = \frac{10}{(10p+1)} = \frac{1}{(p+1/10)} \quad \Rightarrow \quad h(t) = e^{-\frac{t}{10}}$$

c) Při vzorkování platí $t = kT = k$ a tedy $h(k) = e^{-\frac{k}{10}}$

d) Pro ekvivalentní přenos platí

$$F_e(z) = \left(1 - z^{-1}\right) Z\{h(k)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\left(e^{-0,1}\right)^k\right\} = \frac{z-1}{z}\frac{z}{z-e^{-0,1}} = \frac{z-1}{z-e^{-0,1}}$$

e) Pro diferenční rovnici diskretizovaného systému a jeho přechodovou charakteristiku platí

$$F_e(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z-e^{-0,1}} = \frac{1-z^{-1}}{1-e^{-0,1}z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad Y(z)\left(1 - e^{-0,1}z^{-1}\right) = U(z)\left(1 - z^{-1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y(k) - e^{-0,1}y(k-1) = u(k) - u(k-1) \Rightarrow \quad y(k) = e^{-0,1}y(k-1) + u(k) - u(k-1)$$

$$k = 0 \quad y(0) = e^{-0,1}y(0-1) + u(0) - u(0-1) = e^{-0,1}0 + 1 - 0 = 1$$

$$k = 1 \quad y(1) = e^{-0,1}y(1-1) + u(1) - u(1-1) = e^{-0,1}1 + 1 - 1 = e^{-0,1}$$

$$k = 2 \quad y(2) = e^{-0,1}y(2-1) + u(2) - u(2-1) = e^{-0,1}e^{-0,1} + 1 - 1 = e^{-0,2}$$

$$k = 3 \quad y(3) = e^{-0,1}y(3-1) + u(3) - u(3-1) = e^{-0,1}e^{-0,2} + 1 - 1 = e^{-0,3}$$

$$k = 4 \quad y(4) = e^{-0,1}y(4-1) + u(4) - u(4-1) = e^{-0,1}e^{-0,3} + 1 - 1 = e^{-0,4}$$

Jiné řešení

$$H(z) = Z\{\sigma(k)\}F_e(z) = \frac{z}{z-1}\frac{z-1}{z-e^{-0,1}} = \frac{z}{z-e^{-0,1}} = \frac{1}{1-e^{-0,1}z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-0,1}z^{-1}\right)^k =$$

$$= 1z^0 + e^{-0,1}z^{-1} + e^{-0,2}z^{-2} + e^{-0,3}z^{-3} + e^{-0,4}z^{-4} + \ldots \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h(0) = 1, h(1) = e^{-0,1}, h(2) = e^{-0,2}, h(3) = e^{-0,3}, h(4) = e^{-0,4}, \ldots$$