BSAS-sk.A termín1, 17.1.2007	Jméno	ID

1. Je dán spojitý signál $f(t) = 1 + 4\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$. **(10b)**

a) Rozhodněte, zda je signál periodický. V případě že ano, určete jeho základní periodu a základní kmitočet. (**2b**)

b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu. (**2b**)

c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum signálu. Popište a ocejchujte osy. (**4b**)

d) V případě, že tento signál je periodický určete jeho výkon, v případě že není periodický určete jeho energii. (**2b**)

Pomůcka: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

Řešení:

a) Platí $f(t) = 1 + 4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = 1 + 2\sin t$. Signál je periodický se základní periodou $P = 2\pi$ a základní kmitočtem $\omega_0 = 2\pi / P = 2\pi / 2\pi = 1$.

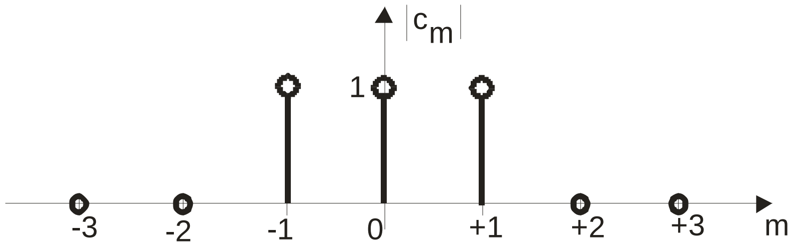
b) Platí $f(t) = 1 + 2\sin t = 1 + 2\frac{(e^{jt} - e^{-jt})}{2j} = 1 - j(e^{jt} - e^{-jt}) = 1 + je^{-jt} - je^{+jt}$ takže ve spektru tohoto signálu jsou jen koeficienty $c_0 = 1, c_{-1} = j$ a $c_{+1} = -j$ a ostatní koeficienty jsou nulové.

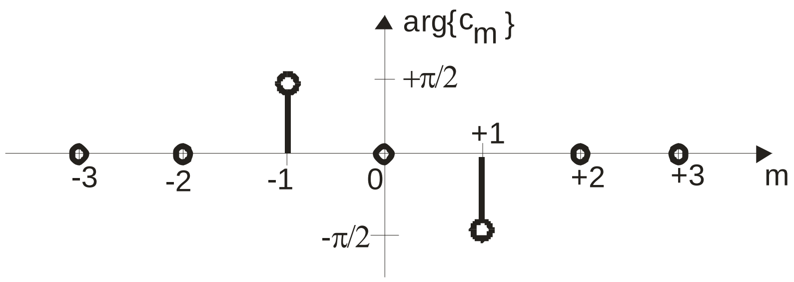
c) Pro amplitudové a fázové spektrum platí

$$|c_0| = |1| = 1 \qquad \arg\{c_0\} = \arg\{1\} = 0$$

$$|c_{-1}| = |+j| = 1 \qquad \arg\{c_{-1}\} = \arg\{+j\} = +\pi/2$$

$$|c_{+1}| = |-j| = 1 \qquad \arg\{c_{+1}\} = \arg\{-j\} = -\pi/2$$





d) Signál je periodický a pro jeho výkon platí na základě Parcevalovy rovnosti

$$P_W = \frac{1}{P}\int_0^P |f(t)|^2\,dt = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |c_m|^2 = |c_0|^2 + |c_{-1}|^2 + |c_{+1}|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

2. Spojitý systém má přechodovou charakteristiku $h(t)=\begin{cases}2+2e^{-t/2}-4e^{-t/4} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ (**16b**)

a) Načrtněte tuto charakteristiku. Popište a ocejchujte osy. (**2b**)

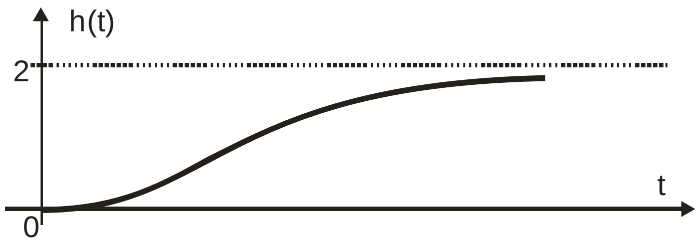
b) Vypočtěte impulsovou charakteristiku $g(t)$ (**4b**) a načrtněte ji. Popište a ocejchujte osy (**2b**)

c) Vypočtěte operátorový přenos systému (**4b**)

d) Na vstupu systému působí signál $u(t)=2\sigma(t)$. Určete ustálenou hodnotu výstupu systému. (**4b**)

Řešení:

a) Přechodová charakteristika $h(0)=0,\ h'(0)=0,\ h(\infty)=2,\ h'(\infty)=0$

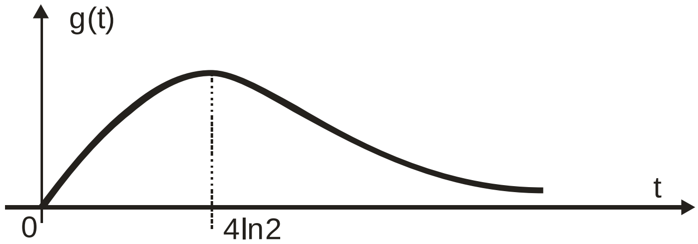


b) Pro impulsovou charakteristiku platí

$$g(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(2+2e^{-t/2}-4e^{-t/4}\right)=2\left(-\frac{1}{2}e^{-t/2}\right)-4\left(-\frac{1}{4}e^{-t/4}\right)=e^{-t/4}-e^{-t/2}$$

Extrém: $g'(t)=-\frac{1}{4}e^{-t/4}+\frac{1}{2}e^{-t/2}=0\Rightarrow\frac{1}{2}e^{-t/2}=\frac{1}{4}e^{-t/4}\Rightarrow 2=e^{+t/2}e^{-t/4}=e^{+t/4}\Rightarrow t=4\ln 2$

$g(0)=0,\ g'(0)=0,5-0,25=0,25,\ g(\infty)=0,\ g'(\infty)=0$



c) Platí

$$F(p)=\mathcal{L}\{g(t)\}=\mathcal{L}\left\{e^{-t/4}-e^{-t/2}\right\}=\frac{1}{p+1/4}-\frac{1}{p+1/2}=\frac{4}{4p+1}-\frac{2}{2p+1}=\frac{8p+4-8p-2}{(4p+1)(2p+1)}=$$

$$=\frac{2}{(4p+1)(2p+1)}$$

d) Na vstupu působí jednotkový skok o velikosti 2. Odezva systému na takový signál je rovna $2h(t)$ a proto pro ustálenou hodnotu platí $\lim\limits_{t\to\infty}2h(t)=2\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=4$

3. Spojitý systém se vstupem $u(t)$ a výstupem $y(t)$ je popsán diferenciální rovnicí

$$8y''(t)+6y'(t)+y(t)=2u(t) \qquad \textbf{(16b)}$$

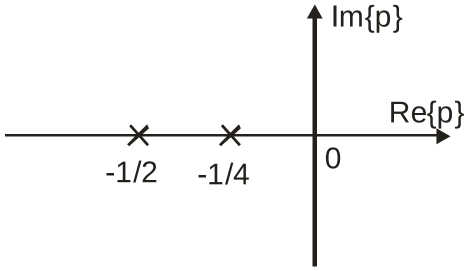
a) Určete operátorový přenos systému (**2b**)
b) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. (**4b**)
c) Rozhodněte o stabilitě systému, zdůvodněte rozhodnutí (**2b**)
d) Načrtněte amplitudovou (**4b**) a fázovou (**4b**) frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Popište a ocejchujte osy

Řešení:

a) Platí $8p^2Y(p)+6pY(p)+Y(p)=2U(p) \quad \Rightarrow \quad F(p)=\dfrac{2}{8p^2+6p+1}$

b) Charakteristická rovnice

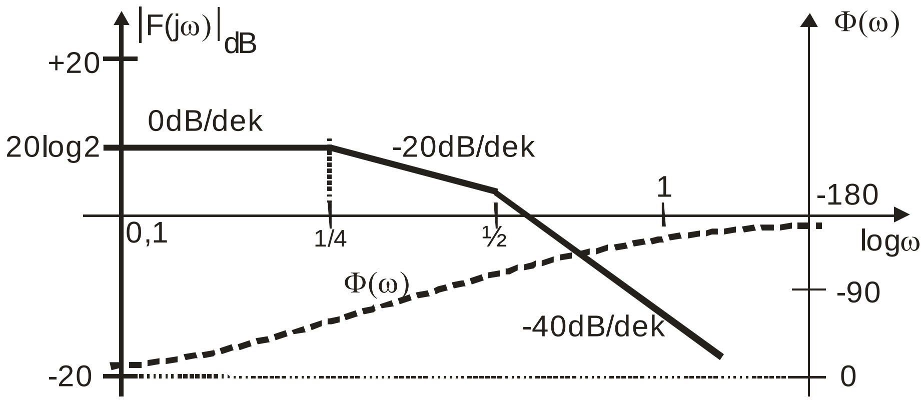
$8p^2+6p+1=0 \Rightarrow p_{1,2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-32}}{16}=\begin{cases}-1/4\\-1/2\end{cases}$. Systém má dva póly a žádnou nulu.



c) Oba póly leží v levé polorovině komplexní roviny, a proto je systém stabilní.
d) Platí

$$F(p)=\frac{2}{8p^2+6p+1}=\frac{2}{8(p+1/4)(p+1/2)}=\frac{2}{(4p+1)(2p+1)}$$

$$F(j\omega)=\frac{2}{(4j\omega+1)(2j\omega+1)}\Rightarrow\left|F(j\omega)\right|=\frac{2}{\sqrt{16\omega^2+1}\sqrt{4\omega^2+1}},\ \Phi(\omega)=-arctg4\omega-arctg2\omega$$

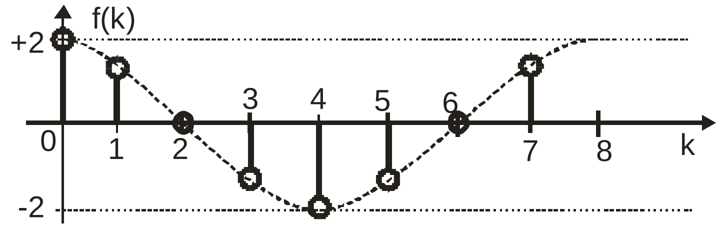


4. Je dán diskrétní periodický signál $f\left(k\right)=2\sin\left(\frac{2\pi}{N}k+\frac{\pi}{2}\right)$ s periodou $N=8$. **(12b)**

a) Načrtněte jednu periodu signálu pro. Popište a ocejchujte osy. (**4b**)
b) Určete spektrum tohoto signálu (**4b**)
c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum. Popište a ocejchujte osy. (**4b**)
Pomůcka: $\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

Řešení:

a) Platí $f\left(k\right)=2\sin\left(\frac{2\pi}{8}k+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{2\pi}{8}k\cos\frac{\pi}{2}+2\cos\frac{2\pi}{8}k\sin\frac{\pi}{2}=2\cos\frac{2\pi}{8}k$

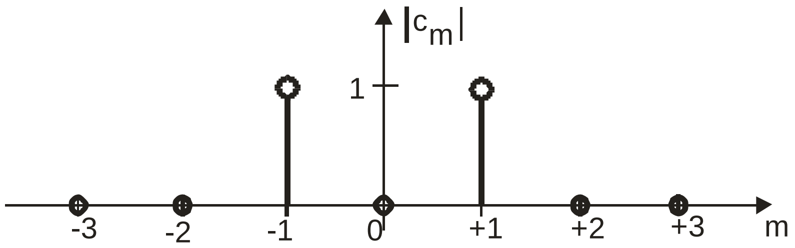


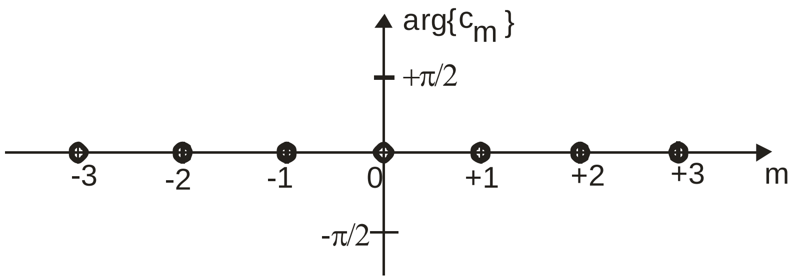
b) Platí $f\left(k\right)=2\cos\frac{2\pi}{8}k=2\frac{e^{j\frac{2\pi}{8}k}+e^{-j\frac{2\pi}{8}k}}{2}=e^{j\frac{2\pi}{8}k}+e^{-j\frac{2\pi}{8}k}=e^{-j\frac{2\pi}{8}k}+e^{+j\frac{2\pi}{8}k}$. Vzhledem k tomu, že spektrum je také periodické s periodou N lze v inverzní formuli DFŘ sčítat od libovolného indexu počínaje tj.

$$f\left(k\right)=\sum_{m=0}^{8-1}c_m e^{jm\frac{2\pi}{8}k}=\sum_{m=-1}^{8-2}c_m e^{jm\frac{2\pi}{8}k}=c_{-1}e^{j(-1)\frac{2\pi}{8}k}+c_0 e^{j(0)\frac{2\pi}{8}k}+c_{+1}e^{j(+1)\frac{2\pi}{8}k}+..+c_{+5}e^{j(+5)\frac{2\pi}{8}k}+c_{+6}e^{j(+6)\frac{2\pi}{8}k}$$

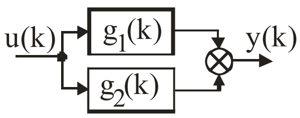
Je zřejmé, že $c_{-1}=1, c_{+1}=1$ a ostatní koeficienty spektra jsou nulové.

c) Platí: $\left|c_{-1}\right|=\left|1\right|=1, \arg\left\{c_{-1}\right\}=0, \quad \left|c_{+1}\right|=\left|1\right|=1, \arg\left\{c_{+1}\right\}=0$





5. Je dán diskrétní systém podle obrázku a pro impulsní charakteristiky platí



$$g_1(k)=\begin{cases}0,5^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}\quad g_2(k)=\begin{cases}0,8^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$ (**16b**)

a) Vypočtěte operátorový přenos celého systému (**4b**)
b) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. (**3b**)
c) Vypočtěte impulsní charakteristiku celého systému (**3b**)
d) Určete diferenční rovnici celého systému (**3b**)
e) Rozhodněte o stabilitě celého systému, zdůvodněte. (**3b**)

Řešení:

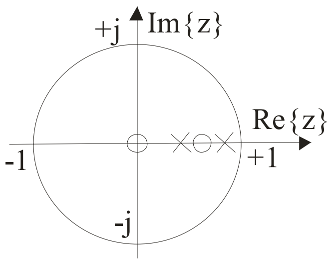
a) Platí

$$F_1(z)=\mathcal{Z}\{g_1(k)\}=\frac{z}{z-0,5},\quad F_2(z)=\mathcal{Z}\{g_2(k)\}=\frac{z}{z-0,8},$$

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=F_1(z)+F_2(z)=\frac{z}{z-0,5}+\frac{z}{z-0,8}=\frac{2z^2-1,3z}{(z-0,5)(z-0,8)}$$

b) Platí

$$F(z)=\frac{2z^2-1,3z}{(z-0,5)(z-0,8)}=\frac{2z(z-0,65)}{(z-0,5)(z-0,8)}$$. Systém má dva póly $z_1=0,5;\ z_2=0,8$ a dvě nuly $n_1=0,\ n_2=0,65$.



c) Pro impulsní charakteristiku platí

$$g(k)=g_1(k)+g_2(k)=\begin{cases}0,5^k+0,8^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

d) Platí

$$F(z)=\frac{2z^2-1,3z}{(z-0,5)(z-0,8)}=\frac{2z^2-1,3z}{z^2-1,3z+0,48}=\frac{2-1,3z^{-1}}{1-1,3z^{-1}+0,48z^{-2}}=\frac{Y(z)}{U(z)}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad Y(z)\left(1-1,3z^{-1}+0,48z^{-2}\right)=U(z)\left(2-1,3z^{-1}\right)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y(k)-1,3y(k-1)+0,48y(k-2)=2u(k)-1,3u(k-1)$$

e) Oba póly systému leží uvnitř jednotkové kružnice, a proto je systém stabilní.

BSAS-sk.B termín1, 17.1.2007	Jméno	ID

1. Je dán spojitý signál $f(t) = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2} + 2\cos^2\frac{t}{2}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$ (**10b**)

a) Rozhodněte, zda je signál periodický. V případě že ano, určete jeho základní periodu a základním kmitočet. (**2b**)
b) Vypočtěte spektrum tohoto signálu. (**2b**)
c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum signálu. Popište a ocejchujte osy (**4b**)
d) V případě, že tento signál je periodický určete jeho výkon, v případě že není periodický určete jeho energii. (**2b**)

Pomůcka: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Řešení:

a) Platí $f(t) = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2} + 2\cos^2\frac{t}{2} = 1 + 2\cos t$. Signál je periodický se základní periodou $P = 2\pi$ a základním kmitočtem $\omega_0 = 2\pi / P = 2\pi / 2\pi = 1$.

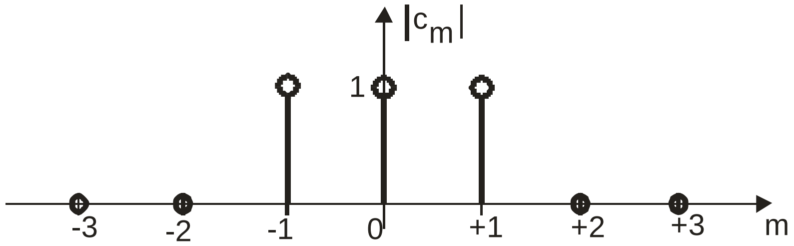
b) Platí $f(t) = 1 + 2\cos t = 1 + 2\frac{(e^{jt} + e^{-jt})}{2} = 1 + e^{jt} + e^{-jt} = 1 + e^{-jt} + e^{+jt}$ takže ve spektru tohoto signálu jsou jen koeficienty $c_0 = 1, c_{-1} = 1, c_{+1} = 1$ a ostatní koeficienty jsou nulové.

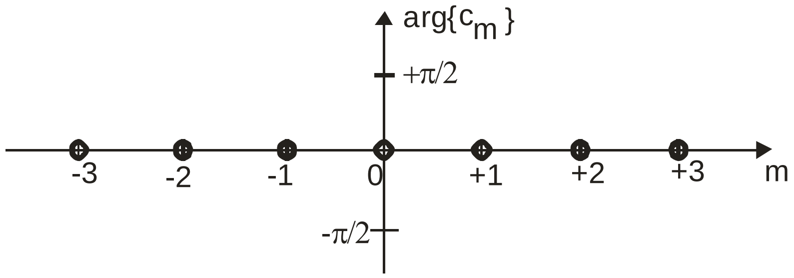
c) Pro amplitudové a fázové spektrum platí

$|c_0| = |1| = 1 \qquad \arg\{c_0\} = \arg\{1\} = 0$

$|c_{-1}| = |1| = 1 \qquad \arg\{c_{-1}\} = \arg\{1\} = 0$

$|c_{+1}| = |1| = 1 \qquad \arg\{c_{+1}\} = \arg\{1\} = 0$





d) Signál je periodický a pro jeho výkon platí na základě Parcevalovy rovnosti

$$P_W = \frac{1}{P}\int_0^P |f(t)|^2\, dt = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |c_m|^2 = c_0^2 + c_{-1}^2 + c_{+1}^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

2. Spojitý systém má impulsní charakteristiku $g(t) = \begin{cases} 100\left(1-e^{-t/4}\right) & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ (**16b**)

a) Načrtněte tuto charakteristiku (**2b**). Popište a ocejchujte osy . Na časové ose vyznačte hodnotu časové konstanty systému (**2b**).

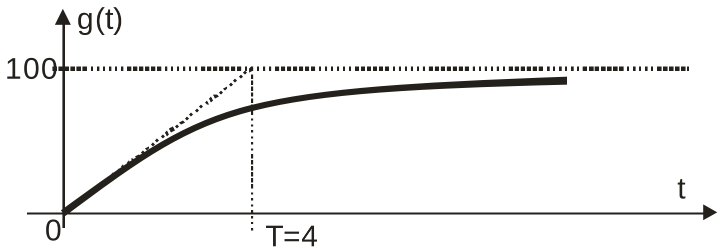
b) Vypočtěte přechodovou charakteristiku $h(t)$ (**4b**).

c) Vypočtěte operátorový přenos systému (**4b**)

d) Na vstupu systému působí signál $u(t) = 2\delta(t)$. Určete ustálenou hodnotu výstupu systému. (**4b**)

Řešení:

a) Platí $g(0)=0,\ g(\infty)=100,\ g'(t)=\frac{100}{4}e^{-t/4} \quad \Rightarrow \quad g'(0)=\frac{100}{4}$



b) Platí $h(t)=\int_0^t g(\tau)d\tau = 100\int_0^t 1 d\tau - 100\int_0^t e^{-\tau/4}d\tau = 100[\tau]_0^t - 100\left[-4e^{-\tau/4}\right]_0^t = 100\left[t+4\left(e^{-t/4}-1\right)\right]$

c) Platí

$$F(p)=\mathrm{L}\{g(t)\}=\mathrm{L}\left\{100\left(1-e^{-t/4}\right)\right\}=\frac{100}{p}-\frac{100}{p+1/4}=\frac{100}{p}-\frac{400}{4p+1}=\frac{400p+100-400p}{p(4p+1)}=\frac{100}{p(4p+1)}$$

d) Na vstupu působí Diracův impuls o ploše 2. Odezva systému na takový signál je rovna $2g(t)$ a proto pro ustálenou hodnotu platí

$$\lim_{t\to\infty} 2g(t) = 2\lim_{t\to\infty} g(t) = 200$$

3. Spojitý systém se vstupem $u(t)$ a výstupem $y(t)$ je popsán diferenciální rovnicí

$$4y''(t) + y'(t) = 100u(t) \qquad \textbf{(16b)}$$

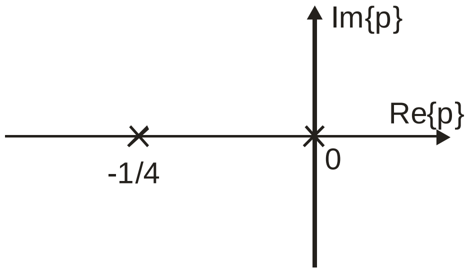
a) Určete operátorový přenos systému (**2b**)
b) Načrtněte rozložení pólů a nul (**4b**)
c) Rozhodněte o stabilitě systému, zdůvodněte rozhodnutí (**2b**)
d) Načrtněte amplitudovou (**4b**) a fázovou (**4b**) frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Popište a ocejchujte osy..

Řešení:

a) Platí $4p^2Y(p) + pY(p) = 100U(p) \quad \Rightarrow \quad F(p) = \dfrac{100}{4p^2 + p} = \dfrac{100}{p(4p+1)}$

b) Charakteristická rovnice

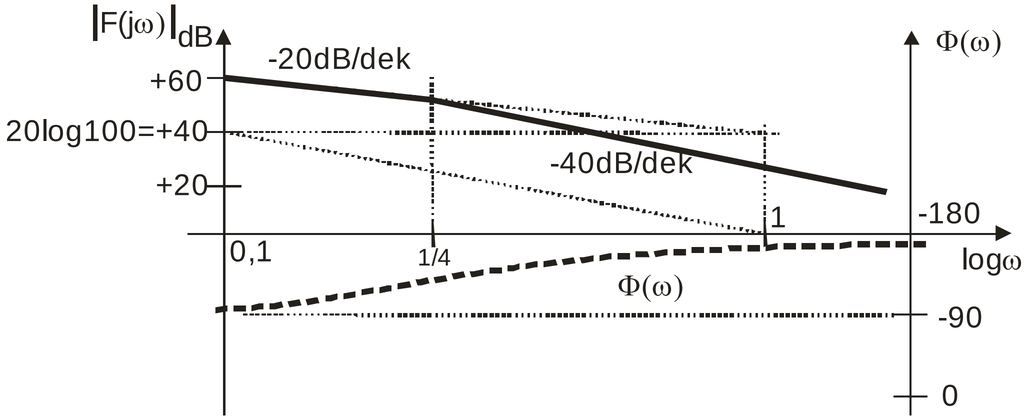
$p(4p+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = \begin{cases} -1/4 \\ 0 \end{cases}$. Systém má dva póly a žádnou nulu.



c) Jeden pól leží v levé polorovině komplexní roviny, druhý leží na imaginární ose, a proto je systém na mezi stability.

d) Platí

$$F(j\omega) = \frac{100}{j\omega(4j\omega+1)} \quad \Rightarrow \quad |F(j\omega)| = \frac{100}{\omega\sqrt{4\omega^2+1}}, \Phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - arctg4\omega$$

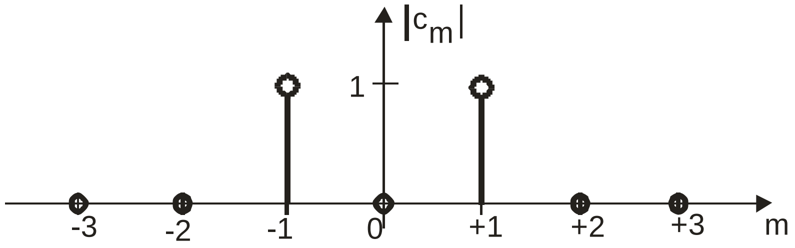


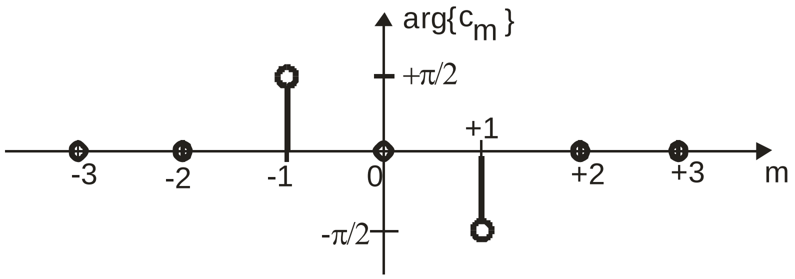
4. Hodnoty koeficientů spektra diskrétního periodického signálu s periodou $N = 8$ jsou $c_{-1} = +j, c_{+1} = -j$ a ostatní koeficienty jsou nulové. **(12b)**

a) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum. Popište a ocejchujte osy (**4b**)
b) Vypočtěte tento diskrétní signál (**4b**)
c) Načrtněte jednu periodu signálu. Popište a ocejchujte osy. (**4b**)

Řešení:

a) Platí $|c_{-1}| = |+j| = 1, \arg\{c_{-1}\} = +\pi/2, \quad |c_{+1}| = |-j| = 1, \arg\{c_{+1}\} = -\pi/2$



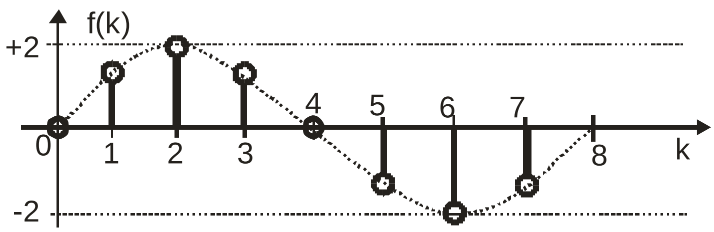


b) Platí Vzhledem k tomu, že i spektrum je periodické s periodou N lze v inverzní DFŘ sčítat od libovolného indexu počínaje tj.

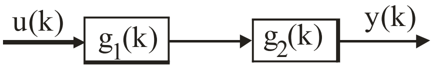
$$f(k) = \sum_{m=0}^{8-1} c_m e^{jm\frac{2\pi}{8}k} = \sum_{m=-1}^{8-2} c_m e^{jm\frac{2\pi}{8}k} = c_{-1}e^{j(-1)\frac{2\pi}{8}k} + c_0 e^{j(0)\frac{2\pi}{8}k} + c_{+1}e^{j(+1)\frac{2\pi}{8}k} + .. + c_{+5}e^{j(+5)\frac{2\pi}{8}k} + c_{+6}e^{j(+6)\frac{2\pi}{8}k}$$

c) Je zřejmé, že z celé této řady jsou nenulové jen koeficienty $c_{-1} = +j, c_{+1} = -j$ a ostatní koeficienty jsou nulové. Proto

$$f(k) = c_{-1}e^{j(-1)\frac{2\pi}{N}k} + c_{+1}e^{j(+1)\frac{2\pi}{N}k} = je^{-j\frac{2\pi}{N}k} - je^{+j\frac{2\pi}{N}k} = 2\frac{e^{+j\frac{2\pi}{N}k} - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}{2j} = 2\sin\frac{2\pi}{N}k$$



5. Je dán diskrétní systém podle obrázku a pro impulsní charakteristiky platí



$$g_1(k)=\begin{cases}(-0,4)^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}\qquad g_2(k)=\begin{cases}(-0,8)^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$ (**16b**)

a) Vypočtěte operátorový přenos celého systému (**4b**)
b) Načrtněte rozložení pólů a nul. Popište osy. (**3b**)
c) Vypočtěte impulsní charakteristiku celého systému (**3b**)
d) Určete diferenční rovnici celého systému (**3b**)
e) Rozhodněte o stabilitě celého systému, zdůvodněte. (**3b**)

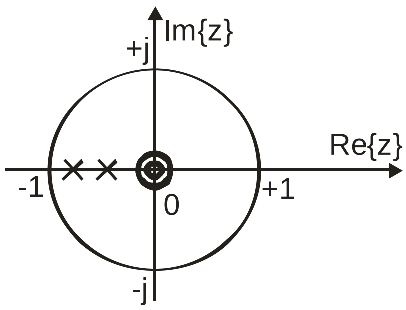
Řešení:

a) Platí

$$F_1(z)=\mathcal{Z}\{g_1(k)\}=\frac{z}{z+0,4},\quad F_2(z)=\mathcal{Z}\{g_2(k)\}=\frac{z}{z+0,8},$$

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=F_1(z)F_2(z)=\frac{z}{z+0,4}\,\frac{z}{z+0,8}=\frac{z^2}{(z+0,4)(z+0,8)}$$

b) Systém má dva póly $z_1=-0,4;\ z_2=-0,8$ a jednu dvojnásobnou nulu $n_1=n_2=0$.



c) Pro impulsní charakteristiku platí

$$F(z)=\frac{z^2}{(z+0,4)(z+0,8)}=\frac{Az}{z+0,4}+\frac{Bz}{z+0,8}=\frac{Az^2+0,8Az+Bz^2+0,4Bz}{(z+0,4)(z+0,8)}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}A+B=1\\0,8A+0,4B=0\end{matrix}\quad\Rightarrow\begin{matrix}A=1-B\\0,8(1-B)+0,4B=0\end{matrix}\quad\Rightarrow\begin{matrix}A=1-B\\0,8-0,4B=0\end{matrix}\quad\Rightarrow\begin{matrix}A=-1\\B=2\end{matrix}$$

$$F(z)=\frac{2z}{z+0,8}-\frac{z}{z+0,4}=\frac{2}{1+0,8z^{-1}}-\frac{1}{1+0,4z^{-1}}\Rightarrow g(k)=\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}=\begin{cases}2(-0,8)^k-(-0,4)^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

d) pro diferenční rovnici platí

$$F(z)=\frac{z^2}{(z+0,4)(z+0,8)}=\frac{z^2}{z^2+1,2z+0,32}=\frac{1}{1+1,2z^{-1}+0,32z^{-2}}=\frac{Y(z)}{U(z)}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad Y(z)\left(1+1,2z^{-1}+0,32z^{-2}\right)=U(z)\quad\Rightarrow\quad y(k)+1,2y(k-1)+0,32y(k-2)=u(k)$$

e) Oba póly systému leží uvnitř jednotkové kružnice, a proto je systém stabilní.