2005 B/KSAS písemka3 1.2.2006	Jméno	ID

1. Je dán spojitý signál $f(t) = \left[\sigma(t+1) - \sigma(t-1)\right]\left(\cos^2 2\pi t + \sin^2 2\pi t\right), \quad t \in (-\infty, +\infty)$.

a) Načrtněte průběh signálu. (**5b**)

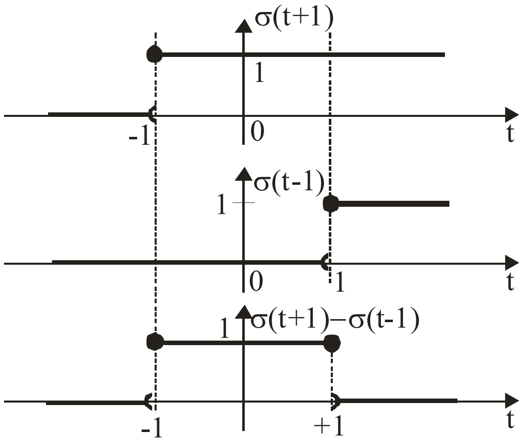
b) Určete zda je signál $f(t)$ periodický. Pokud je periodický, určete jeho periodu. (**2b**)

c) Určete jeho komplexní spektrum. (**3b**)

d) Načrtněte komplexní spektrum (**5b**). Ocejchujte osy. **Celkem 15b**

Řešení:

a) Vzhledem k tomu, že $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ platí $f(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$, a proto

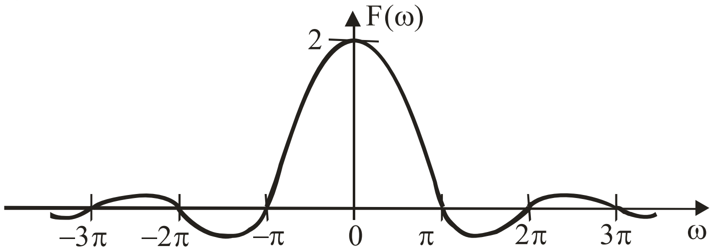


b) Signál není periodický.

c) Pro jeho spektrum platí:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^{+1} e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-1}^{+1} = \frac{e^{-j\omega} - e^{+j\omega}}{-j\omega} = 2\frac{\sin\omega}{\omega}$$

d)



2. Diferenciální rovnice spojitého systému je $y' + 0{,}1y = u$.

a) Určete operátorový přenos systému. (**2b**)

b) Určete frekvenční přenos systému. (**2b**)

c) Načrtněte asymptotickou amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Ocejchujte osy. (**5b**)

d) Vypočtěte (**3b**) a načrtněte (**3b**) přechodovou charakteristiku systému. **Celkem 15b**

Řešení:

a) $y'(t) + 0{,}1y(t) = u(t) \quad /\mathscr{L} \quad \Rightarrow pY(p) + 0{,}1Y(p) = U(p)$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+0{,}1)} = \frac{10}{(10p+1)}$$

b) $F(j\omega) = \dfrac{10}{(10j\omega+1)} = \dfrac{10}{\sqrt{100\omega^2+1}} e^{-j\arctan 10\omega}$

c) Pro absolutní hodnotu platí:

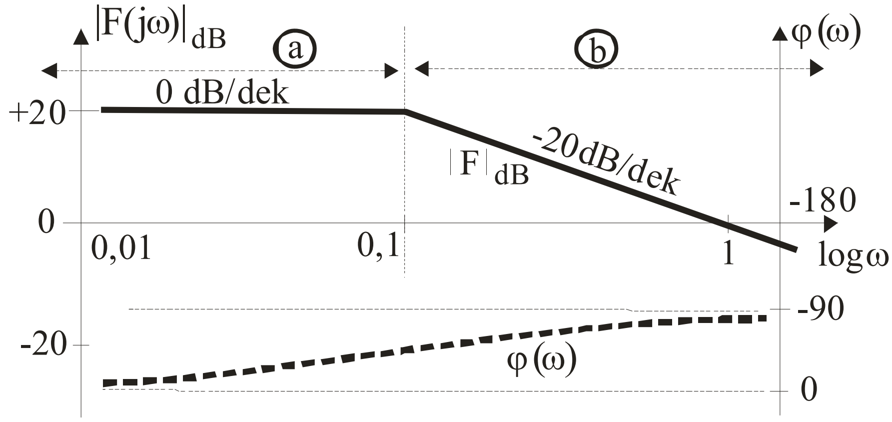
$$\left|F(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left|F(j\omega)\right| = 20\log 10 - 20\log\sqrt{100\omega^2+1} = 20 - 20\log\sqrt{100\omega^2+1}$$

Na charakteristice je jeden zlomový bod $\omega = 1/10 = 0{,}1$ a v jednotlivých oblastech platí:

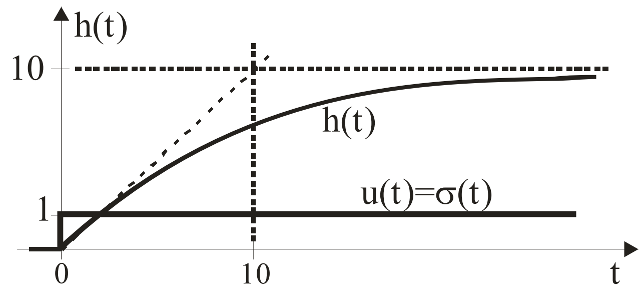
Oblast a: $\omega \ll 0{,}1 \Rightarrow \left|F(j\omega)\right|_{dB} \approx +20\ dB$

Oblast b: $\omega \gg 0{,}1 \Rightarrow \left|F(j\omega)\right|_{dB} \approx 20 - 20\log 10\omega = 20 - 20\log 10 - 20\log\omega = -20\log\omega$.

Pro fázi platí $\varphi(\omega) = -\arctan 10\omega$.



d) $h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p}F(p)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p(p+0{,}1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{10}{p} - \dfrac{10}{p+0{,}1}\right\} = 10\left(1-e^{-t/10}\right) \quad pro\ t>0$



3. Je dán diskrétní periodický signál s periodou $N = 4$ pro jehož hodnoty platí $f(0) = f(2) = 2$ a $f(1) = f(3) = 0$.

a) Vypočtěte hodnoty diskrétní Fourierovy řady. (**4b**)
b) Načrtněte amplitudové spektrum. Ocejchujte osy.(**3b**)
c) Načrtněte fázové spektrum. Ocejchujte osy.(**3b**) **Celkem 10b**

Řešení:

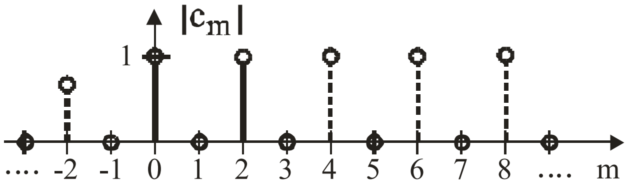
a) $$c_0 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{-j0\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}(2\times1 + 0\times1 + 2\times1 + 0\times1) = 1$$

$$c_1 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{-j1\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(2\times1 + 0\times e^{-j\frac{\pi}{2}1} + 2\times e^{-j\frac{\pi}{2}2} + 0\times e^{-j\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{2-2}{4} = 0$$

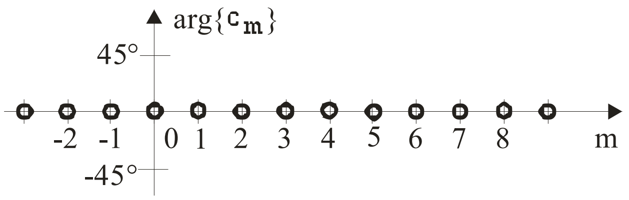
$$c_2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{-j2\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(2\times1 + 0\times e^{-j2\frac{\pi}{2}1} + 2\times e^{-j2\frac{\pi}{2}2} + 0.e^{-j2\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{2+2}{4} = 1$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{-j3\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(2\times1 + 0\times e^{-j3\frac{\pi}{2}1} + 2\times e^{-j3\frac{\pi}{2}2} + 0\times e^{-j3\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{2-2}{4} = 0$$

b) $|c_0| = 1 \quad |c_1| = 0 \quad |c_2| = 1 \quad |c_3| = 0$



c) $\arg\{c_0\} = 0 \quad \arg\{c_1\} = 0 \quad \arg\{c_2\} = 0 \quad \arg\{c_3\} = 0$



4. Diferenční rovnice diskrétního systému je $y(k)+ay(k-1)=u(k-1),\ k=0,1,2,...$ **s počáteční podmínkou** $y(-1)=0$.

a) Určete operátorový přenos systému. (**2b**)
b) Pro jaké hodnoty parametru a je systém stabilní. (**3b**)
c) Vypočtěte impulsovou charakteristiku. (**5b**)
d) Načrtněte impulsovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot systému ve kterém je $a \in (0,1)$. Ocejchujte osy. (**5b**) **Celkem 15b**

Řešení:

a) $y(k)+ay(k-1)=u(k-1) \quad /\mathcal{Z}$

$Y(z)+az^{-1}Y(z)=z^{-1}U(z)$

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z^{-1}}{1+az^{-1}}=\frac{1}{z+a}$$

b) Systém má jeden pól $z_1=-a$, který musí ležet uvnitř jednotkové kružnice aby byl systém stabilní tj. $|a|<1$.

c) Operátorový přenos lze vyjádřit jako součet geometrické řady

$$F(z)=\frac{z^{-1}}{1+az^{-1}}=z^{-1}\frac{1}{1-(-az^{-1})}=z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-az^{-1}\right)^k=z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k z^{-k}=z^{-1}\mathcal{Z}\left\{(-a)^k\right\}$$

což je podle definice Z obraz impulsové charakteristiky a proto

$$g(k)=\begin{cases}(-a)^{k-1} & k\geq 1\\ 0 & k<1\end{cases}.$$

Jiné řešení: Dělení polynomu čitatele polynomem jmenovatele operátorového přenosu

$$\begin{array}{l}
1 : (z+a) = 0z^0 + a^0z^{-1} - a^1z^{-2} + a^2z^{-3} - a^3z^{-4} + \dots \\
\underline{1 + az^{-1}} \\
\quad -az^{-1} \\
\underline{\quad -az^{-1} - a^2z^{-2}} \\
\qquad +a^2z^{-2} \\
\underline{\qquad +a^2z^{-2} + a^3z^{-3}} \\
\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Koeficienty u jednotlivých mocnin z jsou hodnoty impulsové charakteristiky

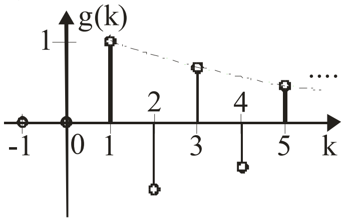
$g(0)=0,\ g(1)=a^0,\ g(2)=-a^1,\ g(3)=a^2,\ g(4)=-a^3,......$

Jiné řešení: Do diferenční rovnice $y(k)=-ay(k-1)+u(k-1)$ dosadíme za $u(k)=\delta(k)$ (výstup systému pak bude jeho impulsovou charakteristikou tj. $y(k)=g(k)$)a vyčíslujeme postupně pro $k=0,1,2,...$.

$$
\begin{array}{llllll}
k \geq 0 & y(k) & = & -ay(k-1) & + & u(k-1) \\
k = 0 & y(0) & = & -ay(-1) & + & u(-1) \quad = 0+0=0 \\
k = 1 & y(1) & = & -ay(0) & + & u(0) \quad = 0+1=1 \\
k = 2 & y(2) & = & -ay(1) & + & u(1) \quad = -a+0=-a \\
k = 3 & y(3) & = & -ay(2) & + & u(2) \quad = (-a)(-a)+0=a^2 \\
k = 4 & y(4) & = & -ay(3) & + & u(3) \quad = (-a)a^2+0=-a^3
\end{array}
$$

....

d)



5. Diskrétní systém je popsán svojí impulsovou charakteristikou $g(k)=\begin{cases}0,25 & k=0,1,2,3\\ 0 & k\neq 0,1,2,3\end{cases}$.

a) Určete přechodovou charakteristiku systému a načrtněte ji pro prvních 5 hodnot. Ocejchujte osy. (**5b**)

b) Určete operátorový přenos systému. (**5b**)

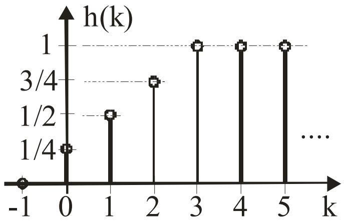
c) Napište diferenční rovnici systému. (3**b**)

d) Rozhodněte o stabilitě systému. (**2b**) **Celkem 15b**

Řešení:

a) $h(0)=g(0)=1/4,\quad h(1)=g(0)+g(1)=1/2,\quad h(2)=g(0)+g(1)+g(3)=3/4$

$h(3)=g(0)+g(1)+g(3)+g(4)=1,\quad h(k)=1\quad k\geq 4$



b)

$$F(z)=\mathscr{Z}\{g(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}g(k)z^{-k}=\frac{1}{4}z^0+\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{1}{4}z^{-3}=\frac{1}{4}\left(z^0+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}\right)=\frac{z^3+z^2+z^1+1}{4z^3}$$

c) $F(z)=\dfrac{Y(z)}{U(z)}=\dfrac{1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}}{4}\quad\Rightarrow\quad Y(z)4=U(z)\left(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}\right)$

$$\Rightarrow\quad y(k)=\frac{1}{4}\left[u(k)+u(k-1)+u(k-2)+u(k-3)\right]$$

d) Systém má jeden trojnásobný pól $z_1=0$ který leží v nule a tedy uvnitř jednotkové kružnice a proto je systém stabilní.