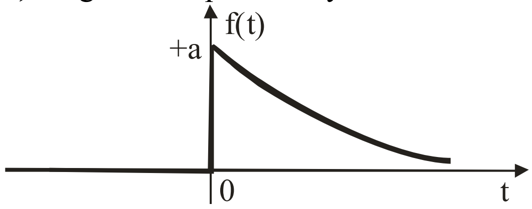
2005 B/KSAS Písemka2 26.1.2006	Jméno	ID

1. Je dán spojitý signál $f(t) = ae^{-at}\sigma(t) \quad a > 0$. (**15b**)

a) Rozhodněte, zda je signál periodický (**1b)** a načrtněte ho (**4b**)
b) Vypočtěte jeho spektrum (**5b**)
c) Určete amplitudové spektrum (**2b**) a načrtněte ho (**3b**)

Řešení:

a) Signál není periodický.



b) Pro spektrum signálu platí

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{+\infty} ae^{-at}e^{-j\omega t}dt = a\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = a\left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right]_0^{\infty} = \frac{a}{(a+j\omega)} = \frac{a(a-j\omega)}{a^2+\omega^2}$$

c) Pro amplitudové spektrum platí

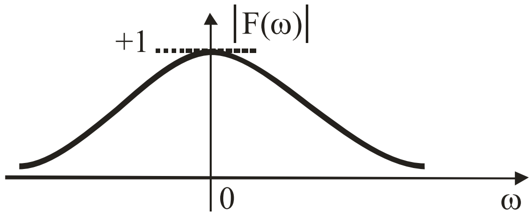
$$|F(\omega)| = \left|\frac{a(a-j\omega)}{a^2+\omega^2}\right| = \frac{a\sqrt{a^2+\omega^2}}{a^2+\omega^2}$$

Funkce $F(\omega)$ je sudou funkcí kmitočtu a platí:

$F(0) = \frac{a\sqrt{a^2}}{a^2} = 1 \qquad \lim_{\omega\to\infty} F(\omega) = \lim_{\omega\to\infty}\frac{a\sqrt{a^2+\omega^2}}{a^2+\omega^2} = 0$ a pro $\omega > 0$ je tato funkce monotónně klesající neboť

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{a\sqrt{a^2+\omega^2}}{a^2+\omega^2}\right) = \frac{a\frac{1}{2}\left(a^2+\omega^2\right)^{-1/2}2\omega\left(a^2+\omega^2\right) - a\left(a^2+\omega^2\right)^{+1/2}2\omega}{\left(a^2+\omega^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2\omega a}{\left(a^2+\omega^2\right)^2}\left[\frac{1}{2}\left(a^2+\omega^2\right)^{+1/2} - \left(a^2+\omega^2\right)^{+1/2}\right] = -\frac{\omega a}{\left(a^2+\omega^2\right)^2}\left(a^2+\omega^2\right)^{+1/2} < 0 \quad \forall\omega > 0$$



2. Je dán diskrétní signál $f(k)=\left[\sigma(k)-\sigma(k-N)\right] \quad N>0$. (**15b**)

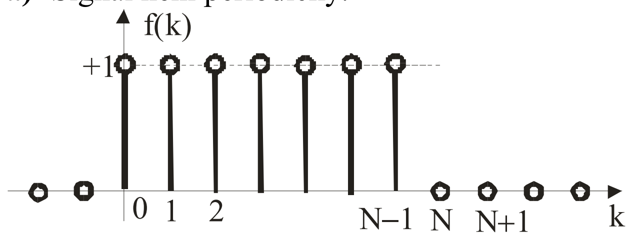
a) Rozhodněte, zda je signál periodický (**1b)** a načrtněte ho **(4b)**

b) Vypočtěte jeho spektrum (Pomůcka: $\sum_{k=0}^{N-1} q^k = \frac{1-q^N}{1-q}$) (**5b**)

c) Načrtněte amplitudové spektrum (**5b**)

Řešení:

a) Signál není periodický.



b) Pro spektrum signálu platí

$$F(m)=\sum_{k=0}^{N-1} f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{k=0}^{N-1} 1e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{-jm\frac{2\pi}{N}}\right)^k=\frac{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}=\frac{1-e^{-jm2\pi}}{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}$$

c) Hodnota spektra pro $m=0$ je neurčitý výraz typu 0/0 a proto:

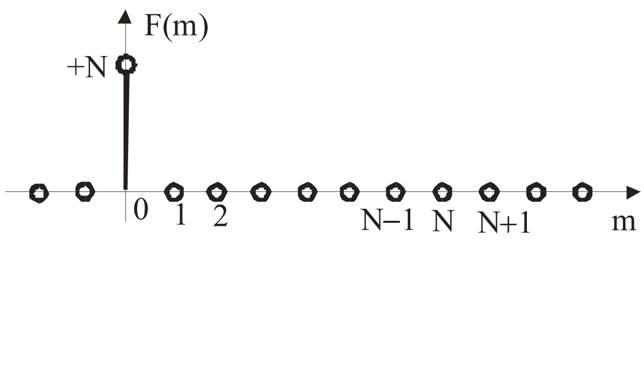
$$F(0)=\lim_{m\to 0} F(m)=\lim_{m\to 0}\frac{1-e^{-jm2\pi}}{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}=\lim_{m\to 0}\frac{j2\pi e^{-jm2\pi}}{j\frac{2\pi}{N}e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}=N\lim_{m\to 0}\frac{e^{-jm2\pi}}{e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}=N$$

Tuto hodnotu lze získat také přímým dosazením $m=0$ do definičního vztahu:

$$F(0)=\sum_{k=0}^{N-1} f(k)e^{-j0\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{k=0}^{N-1} 1=N\,.$$

Pro ostatní $m=1,2,\dots N-1$ jsou hodnoty spektra nulové neboť čitatel $F(m)$ je roven $1-e^{-jm2\pi}=1-1=0$ a jmenovatel je od nuly různý. Pro spektrum tedy platí:

$$F(m)=\begin{cases} N & m=0 \\ 0 & m=1,2,\dots N-1\end{cases}$$



3. Spojitý signál z příkladu 1 s hodnotou $a = 1$ je vstupem spojitého systému. Na výstupu tohoto systému je signál $y(t) = \begin{cases} e^{-t} - e^{-10t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$. (**10b**)

a) Načrtněte průběh výstupního signálu (**4b**)
b) Sestavte diferenciální rovnici systému (**3b**)
c) Načrtněte amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku systému v logaritmických souřadnicích (**3b**)

a) Platí $y(0) = 0, y(\infty) = 0$ a pro derivaci platí:

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d\left(e^{-t} - e^{-10t}\right)}{dt} = -e^{-t} + 10e^{-10t}$$

Extrémy jsou v bodech, které splňují rovnici

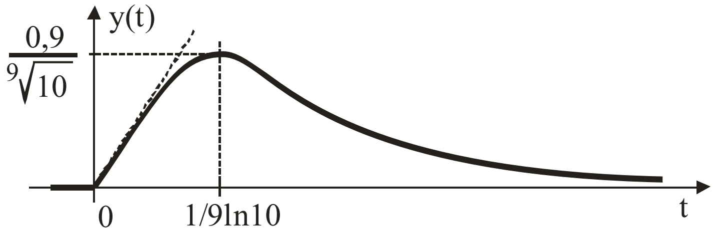
$$-e^{-t} + 10e^{-10t} = 0 \quad \Rightarrow \quad 10e^{-10t} = e^{-t} \quad \Rightarrow \quad 10e^{-9t} = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln 10 - 9t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 10}{9}$$

Extrém je tedy jen jeden a funkce v něm nabývá hodnoty

$$\left[e^{-t} - 10e^{-10t}\right]_{t=\frac{1}{9}\ln 10} = e^{-\frac{1}{9}\ln 10} - e^{-\frac{10}{9}\ln 10} = \left(e^{\ln 10}\right)^{-\frac{1}{9}} - \left(e^{\ln 10}\right)^{-\frac{10}{9}} = (10)^{-\frac{1}{9}} - (10)^{-\frac{1}{9}-1} =$$

$$= (10)^{-\frac{1}{9}} - (10)^{-\frac{1}{9}}(10)^{-1} = (10)^{-\frac{1}{9}}\left[1 - 0{,}1\right] = \frac{0{,}9}{\sqrt[9]{10}} > 0$$

Pro směrnici tečny v bodě $t = 0$ platí: $y'(0) = \left[-e^{-t} + 10e^{-10t}\right]_{t=0} = -1 + 10 = 9$



b) Pro Laplaceův obraz vstupního a výstupního signálu platí:

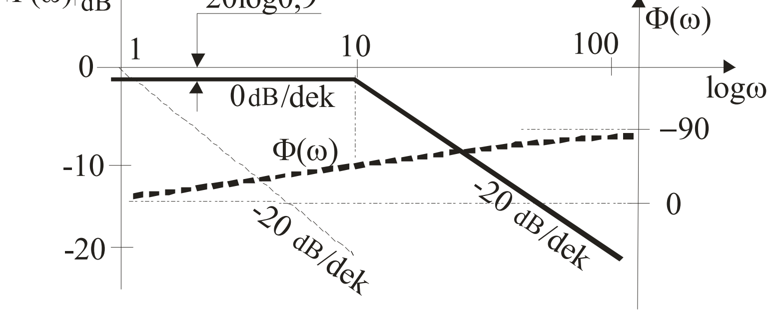
$$U(p) = L\{u(t)\} = L\left\{e^{-t}\right\} = \frac{1}{p+1} \qquad Y(p) = L\{y(t)\} = L\left\{e^{-t} - e^{-10t}\right\} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+10}$$

Pro operátorový přenos systému platí

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+10}}{\frac{1}{p+1}} = 1 - \frac{\frac{1}{p+10}}{\frac{1}{p+1}} = 1 - \frac{p+1}{p+10} = \frac{p+10-p-1}{p+10} = \frac{9}{p+10} = \frac{0{,}9}{0{,}1p+1}.$$

Pro diferenciální rovnici systému platí: $y'(t) + 10y(t) = 9u(t)$

c) Frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích:

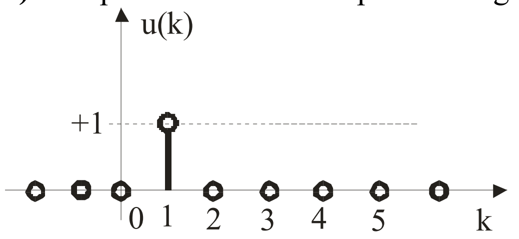


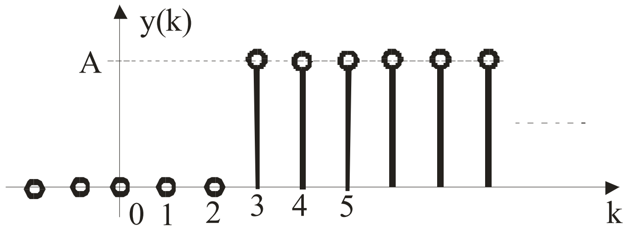
4. Diskrétní systém má na vstupu posloupnost $u(k)=\delta(k-1)$ a na výstupu posloupnost $y(k)=A\sigma(k-3)$ kde $A>1$. (**15b**)

a) Načrtněte průběh obou posloupností. (**2b**)
b) Sestavte diferenční rovnici systému (**5b**)
c) Vypočtěte (**4b**) a načrtněte (**4b**) přechodovou charakteristiku systému

Řešení:

a) Amplitudové a fázové spektrum signálu





b) Pro Z obraz vstupního a výstupního signálu platí:

$$U(z)=Z\{\delta(k-1)\}=z^{-1}\qquad Y(z)=Z\{A\sigma(k-3)\}=Az^{-3}\frac{z}{z-1}=A\frac{z^{-3}}{1-z^{-1}}$$

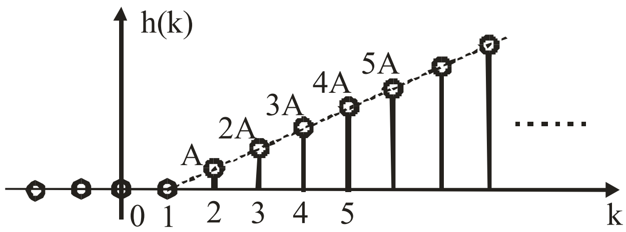
Pro operátorový přenos a diferenční rovnici platí

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{A\dfrac{z^{-3}}{1-z^{-1}}}{z^{-1}}=\frac{Az^{-2}}{1-z^{-1}}\quad\Rightarrow\quad y(k)-y(k-1)=Au(k-2)$$

c) Pro přechodovou charakteristiku platí

$$Z\{h(k)\}=F(z)\frac{z}{z-1}=\frac{Az^{-2}}{1-z^{-1}}\frac{z}{z-1}=\frac{Az^{-1}}{z-1}\frac{z}{z-1}=\frac{Az^{-1}}{z-1}\frac{z}{z-1}=Az^{-1}\frac{z}{(z-1)^2}$$

Protože $Z\{k\}=\dfrac{z}{(z-1)^2}\quad\Rightarrow\quad h(k)=\begin{cases}A(k-1) & k=1,2,3,\ldots\\ 0 & k<1\end{cases}$



5. Je dán spojitý systém s impulsní charakteristikou $g(t) = A\sigma(t),\ A > 0$ .. (**15b**)

a) Vypočtěte operátorový přenos systému. Jedná se o systém statický nebo astatický? (**2b**)
b) Vypočtěte přechodovou charakteristiku systému (**2b**)
c) Na vstupu tohoto systému je připojen tvarovač nultého řádu. Jaká musí být vzorkovací perioda T, aby pro $A = 10$ platilo pro ekvivalentní Z přenos diskretizovaného spojitého systému $F_e(z) = 1/(z-1)$? (**5b**)
d) Vypočtěte přechodovou charakteristiku diskretizovaného systému (**3b**) a načrtněte ji spolu s přechodovou charakteristikou spojitého systému ($A = 10$) do jednoho obrázku a porovnejte. (**3b**).

Řešení

a) Pro operátorový přenos platí:
$F(p) = L\{g(t)\} = AL\{\sigma(t)\} = A/p$ Jedná se o astatický (integrační) systém.

b) Pro přechodovou charakteristiku platí

$$h(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}F(p)\right\} = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{A}{p^2}\right\} = \begin{cases} At & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

c) Pro ekvivalentní Z přenos diskretizovaného systému platí
$F_e(z) = \left(1 - z^{-1}\right) Z\{h(k)\}$ kde $h(k)$ je navzorkovaná přechodová charakteristika $h(t)$ tj.

$$h(k) = h(t)\big|_{t=kT} = AkT \quad k = 0,1,2,\dots.$$

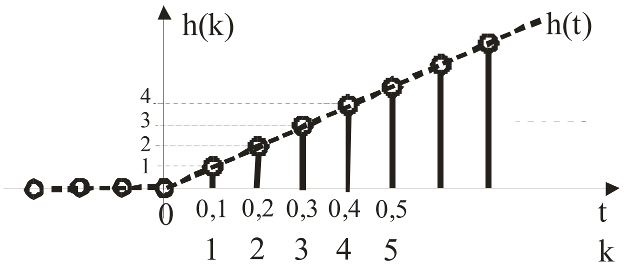
Její Z obraz bude $Z\{h(k)\} = Z\{AkT\} = AT.Z\{k\} = AT\dfrac{z}{(z-1)^2}$

a pro ekvivalentní Z přenos diskretizovaného systému bude platit

$$F_e(z) = \left(1 - z^{-1}\right) Z\{h(k)\} = \frac{z-1}{z}\frac{ATz}{(z-1)^2} = \frac{AT}{z-1} \quad \Rightarrow \quad AT = 1 \quad T = \frac{1}{A} = \frac{1}{10} = 0{,}1\,\mathrm{sec}$$

d) Pro přechodovou charakteristiku diskretizovaného systému platí

$$Z\{h(k)\} = \frac{z}{z-1}F_e(z) = \frac{z}{z-1}\frac{1}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad \Rightarrow \quad h(k) = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$



Obě charakteristiky nabývají v okamžicích vzorkování stejných hodnot.