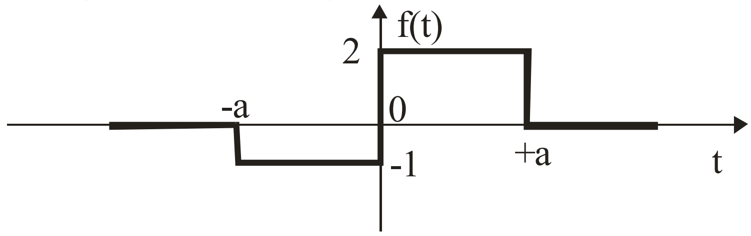
2005 B/KSAS Písemka1 17.1.2006	Jméno	ID

1. Je dán spojitý signál $f(t) = -\sigma(t+a) + 3\sigma(t) - 2\sigma(t-a) \quad a > 0 \quad t \in (-\infty, +\infty)$. (**15b**)

a) Rozhodněte, zda je signál periodický a načrtněte ho (**5b**)
b) Vypočtěte jeho stejnosměrnou složku (**5b**)
c) Vypočtěte energii signálu (**5b**)

Řešení:

a) Signál není periodický.



b) Stejnosměrná složka signálu je rovna hodnotě frekvenčního spektra pro kmitočet $\omega = 0$. Tedy

$$F(\omega = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j0t} dt = \int_{-a}^{+0} (-1)\, dt + \int_{0}^{+a} (+2)\, dt = -[t]_{-a}^{0} + 2[t]_{0}^{+a} = -a + 2a = a$$

c) $$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) \right|^2 dt = \int_{-a}^{+0} 1dt + \int_{0}^{+a} 4dt = [t]_{-a}^{0} + 4[t]_{0}^{+a} = +a + 4a = 5a$$

2. Je dána přechodová charakteristika spojitého systému $h(t)=\begin{cases} e^{-t/4}-e^{-t/3} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$. (**10b**)

a) Vypočtěte impulsní charakteristiku systému **(3b)**

b) Načrtněte impulsní charakteristiku. Obrázek zdůvodněte výpočtem (**6b**)

c) Rozhodněte o stabilitě systému (**1b**)

Řešení:

a) Pro impulsní charakteristiku platí $g(t)=h'(t)=-\frac{1}{4}e^{-t/4}+\frac{1}{3}e^{-t/3}$.

b) Nalezení průběhu impulsní charakteristiky

$g(0)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ $\quad g(\infty)=0$ a pro extrém $g(t)$ platí:

$g'(t)\overset{!}{=}0=\frac{1}{16}e^{-t/4}-\frac{1}{9}e^{-t/3} \quad\Rightarrow\quad \frac{16}{9}=e^{+t/3-t/4}=e^{+t/12} \quad t=12\ln\frac{16}{9}=24\ln\frac{4}{3}>0$.

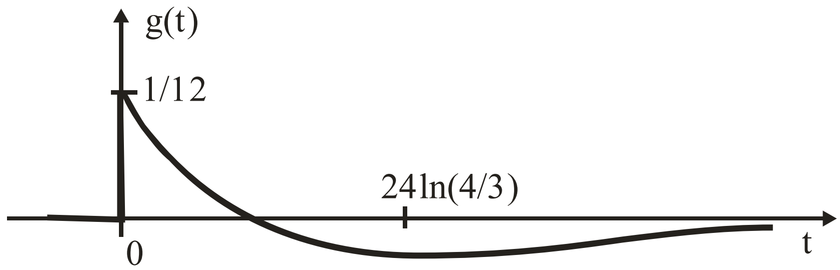
Extrém je tedy jen jeden, a to na kladné ose času a pro hodnotu tohoto extrému platí:

$$g\left(24\ln\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{4}e^{-\frac{24}{4}\ln\frac{4}{3}}+\frac{1}{3}e^{-\frac{24}{3}\ln\frac{4}{3}}=-\frac{1}{4}\left(e^{\ln\frac{4}{3}}\right)^{-6}+\frac{1}{3}\left(e^{\ln\frac{4}{3}}\right)^{-8}=-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{6}+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{8}=\left(\frac{3}{4}\right)^{6}\left(\frac{1}{3}\frac{9}{16}-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^{6}\left(\frac{3}{16}-\frac{4}{16}\right)=-\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{6}<0$$

Pro směrnici tečny $g(t)$ v počátku platí

$g'(t=0)=\left[\frac{1}{16}e^{-t/4}-\frac{1}{9}e^{-t/3}\right]_{t=0}=\frac{1}{16}-\frac{1}{9}=\frac{9-16}{144}=-\frac{7}{144}<0$. Proto:



c) Systém má dva póly a oba leží v levé polovině- systém je stabilní.

3. Spojitý systém má dva póly $p_1 = -1/4, p_2 = -1/3$ a jednu nulu $n_1 = 0$ a na kmitočtu 1 rad/sec má tento systém zesílení $12/\sqrt{170}$. (**10b**)

a) Určete operátorový přenos systému (**5b**)

b) Napište diferenciální rovnici systému (**1b**)

c) Načrtněte amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích (**4b**)

a) Pro operátorový přenos systému platí na základě zadaných pólů a nul:

$F(p) = \dfrac{Kp}{(p+1/3)(p+1/4)}$ kde K je zatím neznámé zesílení systému, které určíme z frekvenčního přenosu na kmitočtu 1 rad/sec. Platí:

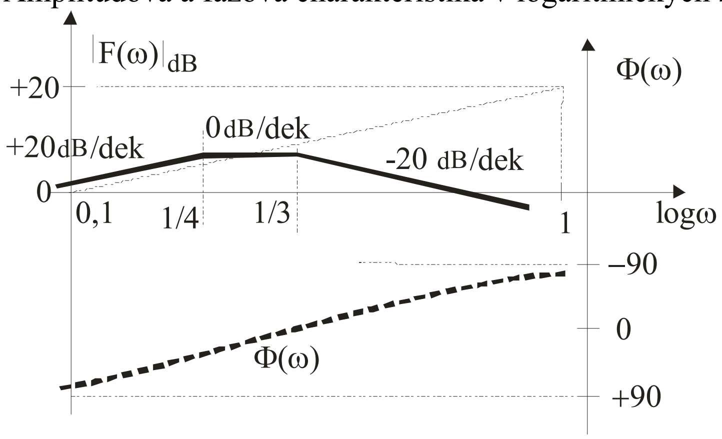
$$\left|F(j\omega)\right|_{\omega=1} = \left|\frac{12Kj\omega}{(3j\omega+1)(4j\omega+1)}\right|_{\omega=1} = \left[\frac{12K\omega}{\sqrt{9\omega^2+1}\sqrt{16\omega^2+1}}\right]_{\omega=1} = \frac{12K}{\sqrt{10}\sqrt{17}} = \frac{12K}{\sqrt{170}} \overset{!}{=} \frac{12}{\sqrt{170}} \Rightarrow K = 1$$

Takže pro operátorový přenos systému platí

$$F(p) = \frac{12p}{(3p+1)(4p+1)}$$

b) Diferenciální rovnice: $12y'' + 7y' + y = 12u'$

c) Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích



4. Je dán periodický diskrétní signál s periodou N=4 a jeho a jeho spektrum nabývá hodnot $|c_0| = |c_1| = |c_2| = |c_3| = 0,25 \quad \arg\{c_0\} = \arg\{c_1\} = \arg\{c_2\} = \arg\{c_3\} = 0$. (**15b**)

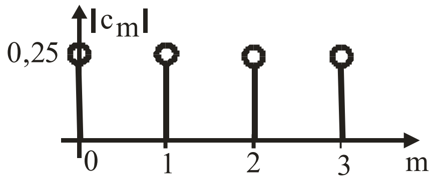
a) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum signálu pro $m = 0,1,2,3$. (**3b**)

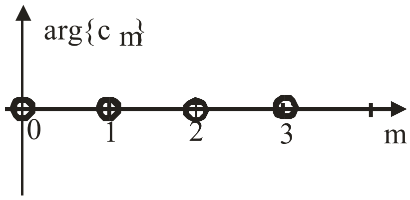
b) Vypočtěte hodnoty signálu pro $k \in (0,12)$ a načrtněte je (**7b**)

c) Vyjádřete tento signál jako superpozici jednotkových impulsů $\delta(k)$ (**5b**)

Řešení:

a) Amplitudové a fázové spektrum signálu





b) Pro diskrétní signál platí Fourierova řada:

$$f(k) = \sum_{m=0}^{3} c_m e^{jm\frac{2\pi}{4}k} = c_0 e^{j0\frac{2\pi}{4}k} + c_1 e^{j1\frac{2\pi}{4}k} + c_2 e^{j2\frac{2\pi}{4}k} + c_3 e^{j3\frac{2\pi}{4}k} = 0,25\left(e^{j0\frac{\pi}{2}k} + e^{j1\frac{\pi}{2}k} + e^{j2\frac{\pi}{2}k} + e^{j3\frac{\pi}{2}k}\right) =$$

$$= 0,25\left[1 + (j)^k + (-1)^k + (-j)^k\right]$$

Pro $k = 0,1,2,3$ bude pro hodnoty signálu platit:

$$f(0) = 0,25\left[1 + (j)^0 + (-1)^0 + (-j)^0\right] = 0,25[1+1+1+1] = 1$$

$$f(1) = 0,25\left[1 + (j)^1 + (-1)^1 + (-j)^1\right] = 0,25[1 + j - 1 - j] = 0$$

$$f(2) = 0,25\left[1 + (j)^2 + (-1)^2 + (-j)^2\right] = 0,25[1-1+1-1] = 0$$

$$f(3) = 0,25\left[1 + (j)^3 + (-1)^3 + (-j)^3\right] = 0,25[1 - j - 1 + j] = 0$$

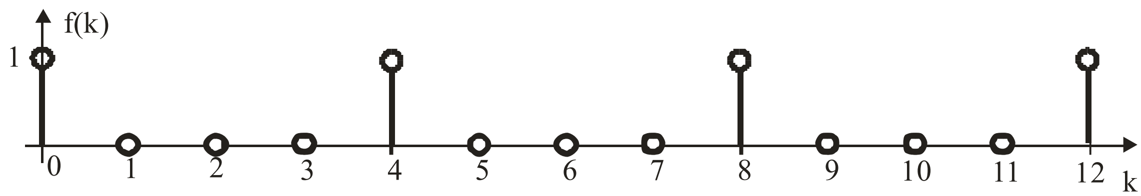
Jelikož je signál periodický s periodou N=4 platí:

$$\ldots = f(-12) = f(-8) = f(-4) = f(0) = f(4) = f(8) = f(12) = \ldots.$$

$$\ldots = f(-11) = f(-7) = f(-3) = f(1) = f(5) = f(9) = f(13) = \ldots.$$

$$\ldots = f(-10) = f(-6) = f(-2) = f(2) = f(6) = f(10) = f(14) = \ldots.$$

$$\ldots = f(-9) = f(-5) = f(-1) = f(3) = f(7) = f(11) = f(15) = \ldots.$$



c) Diskrétní signál lze psát jako $f(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(k - 4i)$

5. Spojitý systém má diferenciální rovnici $12y'' + 7y' + y = u'$. (**20b**)

a) Vypočtěte jeho operátorový přenos (**2b**)

b) Vypočtěte jeho přechodovou charakteristiku (**6b**)

c) Načrtněte jeho přechodovou charakteristiku. Obrázek zdůvodněte výpočtem (**6b**)

d) Určete jeho ekvivalentní přenos pro vzorkovací periodu T. (**6b**)

Řešení

a. Pro operátorový přenos platí:

$$12p^2Y(y) + 7pY(y) + Y(y) = pU(p)$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p}{12p^2 + 7p + 1} = \frac{p}{(4p+1)(3p+1)}$$

b. $h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}F(p)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(4p+1)(3p+1)}\right\}$ Rozložíme na parciální zlomky: Bude

$$\frac{1}{(4p+1)(3p+1)} = \frac{A}{(4p+1)} + \frac{B}{(3p+1)} = \frac{A(3p+1) + B(4p+1)}{(4p+1)(3p+1)} = \frac{p(3A+4B) + (A+B)}{(4p+1)(3p+1)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3A + 4B = 0 \quad A + B = 1 \Rightarrow A = 1 - B \quad 3(1-B) + 4B = 0 \Rightarrow B = -3; A = 4$. Takže

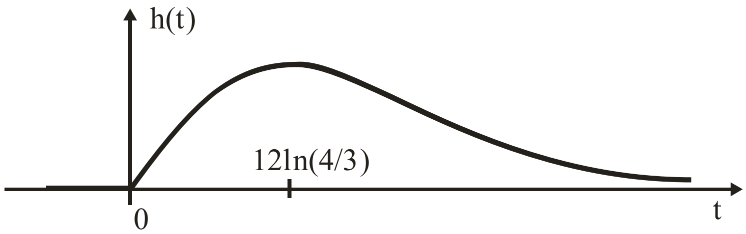
$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(4p+1)} - \frac{3}{(3p+1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1/4)} - \frac{1}{(p+1/3)}\right\} = e^{-\frac{t}{4}} - e^{-\frac{t}{3}} \quad t \geq 0 \text{ a } h(t) = 0 \quad t < 0.$$

c) Pro průběh přechodové charakteristiky platí $h(0) = 0 \quad h(\infty) = 0$. Pro extrémy platí

$$h'(t) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}} = \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}} \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{t}{3}}e^{-\frac{t}{4}} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow e^{\frac{t}{12}} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow t = 12\ln\frac{4}{3} > 0 \text{ a}$$

přechodová charakteristika má jen jeden extrém, a to na kladné ose času. Dále je zřejmé, že $h(t) > 0 \quad t \in (0, +\infty)$ a tedy hodnota extrému musí být kladná. Pro směrnici $h(t)$ v počátku platí

$$h'(t=0) = \left[-\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}\right]_{t=0} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12} > 0.$$ Proto:



d) Vzorkováním tohoto průběhu s periodou T obdržíme:

$h(kT) = h(t)\big|_{t=kT} = e^{-\frac{kT}{4}} - e^{-\frac{kT}{3}} = \left(e^{-\frac{T}{4}}\right)^k - \left(e^{-\frac{T}{3}}\right)^k$. Pro Z obraz této posloupnosti bude platit:

$$\mathscr{Z}\{h(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{T}{4}}\right)^k z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{T}{3}}\right)^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(z^{-1}e^{-\frac{T}{4}}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\left(z^{-1}e^{-\frac{T}{3}}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-\frac{T}{4}}} - \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-\frac{T}{3}}} = \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{4}}} - \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{3}}}$$

Pro ekvivalentní Z přenos diskretizovaného systému pak platí:

$$F_e(z)=\frac{z-1}{z}H(z)=\frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{z-e^{-T/4}}-\frac{z}{z-e^{-T/3}}\right]=\frac{z-1}{z-e^{-T/4}}-\frac{z-1}{z-e^{-T/3}}$$