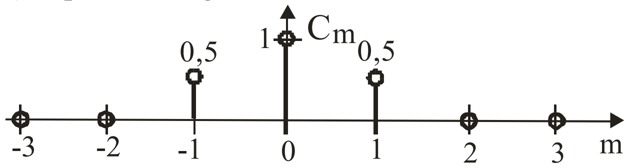
2004 BSAS Písemka 3	2.2.2005

1. Diskrétní spektrum periodického signálu $f(t)$ s periodou $P = 2\pi$ má tři nenulové koeficienty $c_0 = 1, c_1 = 0,5, c_{-1} = 0,5$ a ostatní koeficienty spektra jsou nulové. (**15b**)

a) Nakreslete toto spektrum (**2b).**
b) Vypočtěte časový průběh signálu (**4b**) a načrtněte ho (**4b**), ocejchujte osy (**2b**).
c) Vypočtěte výkon signálu (**3b**).

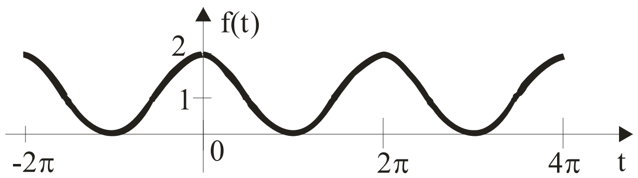
Řešení

a) Spektrum signálu.



b) Časový průběh signálu

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{jm\frac{2\pi}{P}t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{jmt} = \sum_{m=-1}^{+1} c_m e^{jmt} = c_0 + c_1 e^{jt} + c_{-1} e^{-jt} = 1 + 0,5e^{jt} + 0,5e^{-jt} = 1 + \cos t$$



c) Výkon signálu v kmitočtové oblasti

$$P_W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2 = c_0^2 + c_{-1}^2 + c_{+1}^2 = 1 + 0,25 + 0,25 = 1,5$$

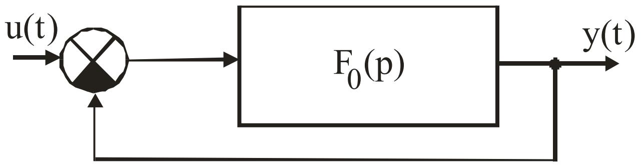
nebo jinak (složitěji) v časové oblasti

$$P_W = \frac{1}{P}\int_0^P |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1+\cos t)^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos t + \cos^2 t\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos t\,dt + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos 2t\,dt = \frac{1}{2\pi}[t]_0^{2\pi} + \frac{1}{4\pi}[t]_0^{2\pi} = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$$

2. Na vstupu spojitého systému působí signál $u(t)=\begin{cases} e^{-t/2} & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ a na výstupu je signál

$y(t)=\begin{cases} e^{-t/2}-e^{-t} & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ tak, jak ukazuje obrázek. (**20b**)



a) Určete operátorový přenos $F_0(p)$. (**12b)**

b) Napište diferenciální rovnici systému jehož vstup je $u(t)$ a výstup je $y(t)$ (**2b**).

c) Vypočtěte impulsovou charakteristiku tohoto systému (**3b**) a načrtněte ji (**3b**).

Řešení

a) Pro Laplaceův obraz vstupního a výstupního signálu platí

$$U(p)=\mathscr{L}\{u(t)\}=\mathscr{L}\{e^{-t/2}\}=\frac{1}{p+1/2}=\frac{2}{2p+1}$$

$$Y(p)=\mathscr{L}\{y(t)\}=\mathscr{L}\{e^{-t/2}-e^{-t}\}=\frac{1}{p+1/2}-\frac{1}{p+1}=\frac{2}{2p+1}-\frac{1}{p+1}=\frac{1}{(2p+1)(p+1)}$$

Pro operátorový přenos celého spojení platí

$$F(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{\frac{1}{(2p+1)(p+1)}}{\frac{2}{(2p+1)}}=\frac{0,5}{(p+1)}\ .$$

Na základě pravidel blokové algebry je

$$F(p)=\frac{F_0(p)}{1+F_0(p)}\Rightarrow 1+F_0(p)=\frac{F_0(p)}{F(p)}\Rightarrow F_0(p)\left[\frac{1}{F(p)}-1\right]=1\Rightarrow F_0(p)=\frac{F(p)}{1-F(p)}.$$

A dosazením za $F(p)$ obdržíme

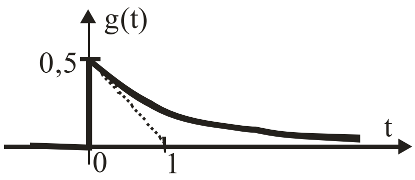
$$F_0(p)=\frac{F(p)}{1-F(p)}=\frac{\frac{0,5}{p+1}}{1-\frac{0,5}{p+1}}=\frac{0,5}{p+0,5}=\frac{1}{2p+1}$$

b) Pro diferenciální rovnici platí

$$F(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{0,5}{(p+1)}\Rightarrow Y(p)(p+1)=0,5U(p)\Rightarrow y'+y=0,5u$$

c) Pro impulsovou charakteristiku platí

$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{0,5}{p+1}\right\}=0,5e^{-t}\quad t\ge 0$$



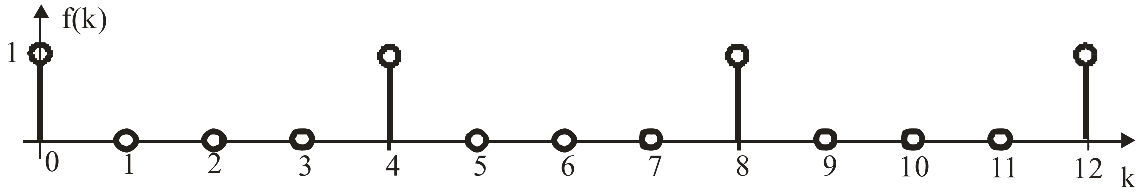
3. Je dán diskrétní signál $f(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\delta(k-4i)=\ldots+\delta(k+8)+\delta(k+4)+\delta(k)+\delta(k-4)+\delta(k-8)+\ldots$.

(**15b**)

a) Načrtněte hodnoty signálu pro $k=0,1,2,\ldots 12$ (**4b**). Ocejchujte osy (**1b**).
b) Je tento signál periodický? Pokud ano, určete jeho periodu (**2b**).
c) Vypočtěte spektrum tohoto signálu (**4b**).
d) Načrtněte amplitudové spektrum tohoto signálu (**3b**). Ocejchujte osy (**1b**).

Řešení

a)



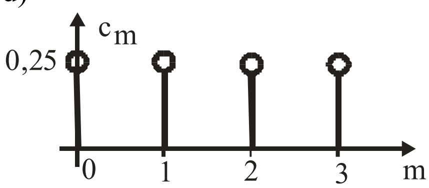
b) Z obrázku je patrno, že signál je periodický a má periodu $N=4$.

c) Pro výpočet koeficientů diskrétní Fourierovy řady platí

$c_m=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{4}k}$ $m=0,1,2,3$. Jelikož $f(1)=f(2)=f(3)=0$ bude

$c_m=\frac{1}{4}f(0)e^{-jm\frac{2\pi}{4}0}=\frac{1}{4}$ $m=0,1,2,3$

d)



4. Diskrétní lineární systém má impulsovou charakteristiku $g(k)=\begin{cases}0,5^k+0,4^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$.

a) Vypočtěte první 4 hodnoty impulsové charakteristiky (**3b**) a načrtněte ji (**2b**).
b) Vypočtěte první 4 hodnoty přechodové charakteristiky (**3b**) a načrtněte ji (**2b**)
c) Určete operátorový přenos systému (**5b**).
d) Napište diferenční rovnici systému(**2b**)
e) Nakreslete jeho rozložení pólů a nul (**3b**)

Řešení

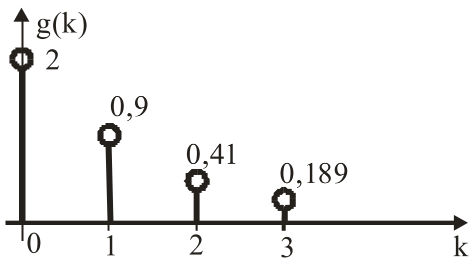
a) Platí

$g(0)=0,5^0+0,4^0=1+1=2$

$g(1)=0,5^1+0,4^1=0,5+0,4=0,9$

$g(2)=0,5^2+0,4^2=0,25+0,16=0,41$

$g(3)=0,5^3+0,4^3=0,125+0,064=0,189$



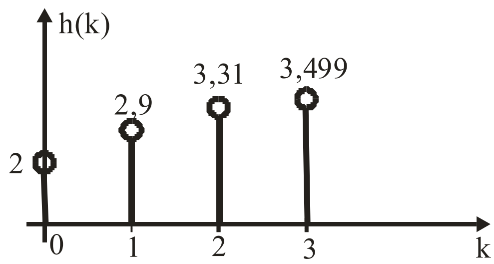
b)

$h(0)=g(0)=2$

$h(1)=h(0)+g(1)=2+0,9=2,9$

$h(2)=h(1)+g(2)=2,9+0,41=3,31$

$h(3)=h(2)+g(3)=3,31+0,189=3,499$



c)

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}g(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(0,5^k+0,4^k\right)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}0,5^k z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}0,4^k z^{-k}=\frac{1}{1-0,5z^{-1}}+\frac{1}{1-0,4z^{-1}}=$$

$$=\frac{z}{z-0,5}+\frac{z}{z-0,4}=\frac{z^2-0,4z+z^2-0,5z}{(z-0,5)(z-0,4)}=\frac{2z^2-0,9z}{(z-0,5)(z-0,4)}=\frac{2z(z-0,45)}{(z-0,5)(z-0,4)}$$

d)

$$F(z)=\frac{2z(z-0,45)}{(z-0,5)(z-0,4)}=\frac{2z^2-0,9z}{z^2-0,9z+0,2}=\frac{2-0,9z^{-1}}{1-0,9z^{-1}+0,2z^{-2}}=\frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$y(k)-0,9y(k-1)+0,2y(k-2)=2u(k)-0,9u(k-1)$$

e)